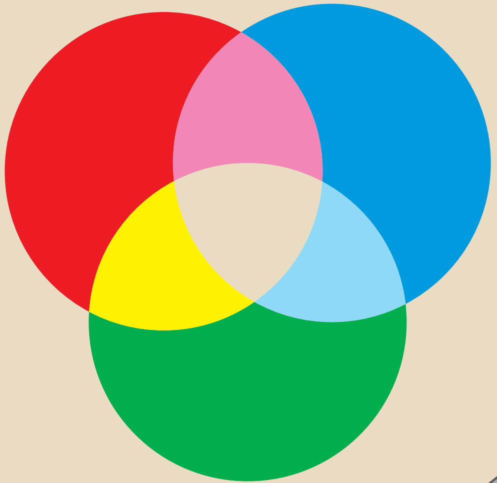
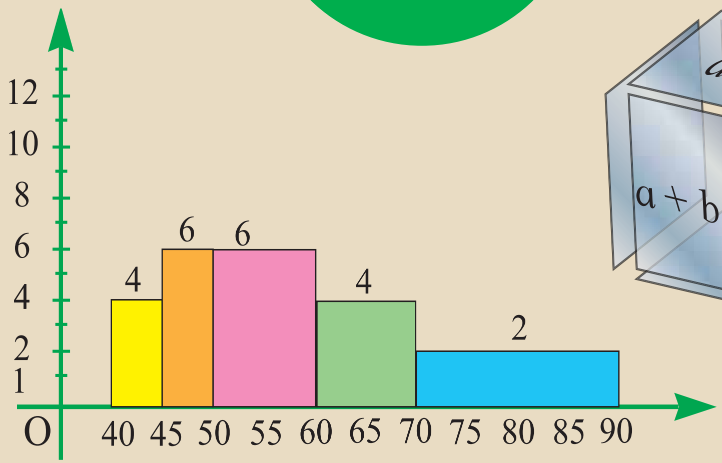
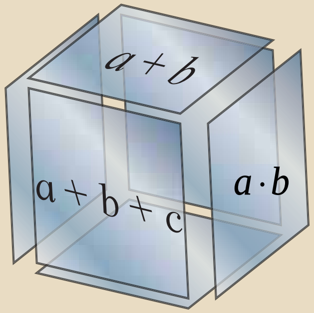
د پوهنې وزارت
د تعلیمي نصاب، د ښوونکو د روزنې
او د ساینس د مرکز معینیت
د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي
کتابونو د تالیف ریاست

رياضي

نهم ټولګی







نهم ټولګی

ISBN 978-9936-25-068-0

درسي کتابونه د پوهنې په وزارت پورې اړه لري. په بازار کې یې پېرودل او پلورل په کلکه منعه دی. له سرغړوونکو سره به یې قانوني چلن وشي.

۱۳۹۰ هـ. ش.

رياضي
نهم ټولگی

۱۳۹۰

هـ.ش

مولفین
- پوهیالی حمدالله شیرزی وردگ د ښوونې او روزنې د وزارت د درسي کتابونو د تالیف د پروژې غړی
- پوهنمل طلاباز حبیب زی د ښوونې او روزنې د وزارت د درسي کتابونو د تالیف د پروژې غړی
- پوهندوی خالقداد فیروز کوهی د ښوونې او روزنې د وزارت د درسي کتابونو د تالیف د پروژې غړی
- دکتور ماخان شینواری د ښوونې او روزنې د وزارت د درسي کتابونو د تالیف د پروژې غړی
- سرمولف میرنقیب الله د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف ریاست علمي غړی

ژباړونکي
- پوهیالی حمدالله شیرزی وردگ د ښوونې او روزنې د وزارت د درسي کتابونو د تالیف د پروژې غړی
- استاد مختار نوید د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف ریاست علمي غړی

علمی اډیټور
- پوهنمل طلاباز حبیب زی د ښوونې او روزنې د وزارت د درسي کتابونو د تالیف د پروژې غړی

د ژبې اډیټور
- سرمحقق نعمت الله اندړ د ښوونې او روزنې د وزارت د درسي کتابونو د تالیف د پروژې غړی

دیني، سیاسي او فرهنگي کمېټه:
- مولوي عبدالصبور عربي
- دکتور محمد یوسف نیازی
- حبیب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعلیمي نصاب په ریاست کې.

د څارنې کمېټه:
ـ دکتور اسدالله محقق د تعلیمي نصاب د پراختیا، د ښوونکو د روزنې او د ساینس مرکز معین.

ـ دکتور شېرعلي ظریفي د تعلیمي نصاب د پراختیا د پروژې مسؤول.

ـ د سرمؤلف مرستیال عبدالظاهر گلستاني د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف لوی رئیس.

کمپوز او ډیزاین
- ولید نوید نسیمي
- محمد اشرف امین

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی	دا عزت د هر افغان دی
کور د سولې کور د تورې	هر بچی یې قهرمان دی
دا وطن د ټولو کور دی	د بلوڅو د ازبکو
د پښتون او هزاره وو	د ترکمنو د تاجکو
ورسره عرب، ګوجر دي	پامیریان، نورستانیان
براهوي دي، قزلباش دي	هم ایماق، هم پشه یان
دا هیواد به تل ځلیږي	لکه لمر پر شنه اسمان
په سینه کې د آسیا به	لکه زړه وي جاویدان
نوم د حق مو دی رهبر	وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحيم

د پوهنې د وزير پيغام

ګرانو ښوونکو او زده کوونکو،

ښوونه او روزنه د هر هېواد د پراختيا او پرمختګ بنسټ جوړوي. تعليمي نصاب د ښوونې او روزنې مهم توکی دی چې د معاصر علمي پرمختګ او ټولنې د اړتياوو له مخې رامنځته کېږي. څرګنده ده چې علمي پرمختګ او ټولنيزې اړتياوې تل د بدلون په حال کې وي. له دې امله لازمه ده چې تعليمي نصاب هم علمي او رغنده انکشاف ومومي. البته نه ښايي چې تعليمي نصاب د سياسي بدلونونو او د اشخاصو د نظريو او هيلو تابع شي.

دا کتاب چې نن ستاسو په لاس کې دی، پر همدې ارزښتونو چمتو او ترتيب شوی دی. علمي ګټورې موضوعګانې پکې زياتې شوې دي. د زده کړې په بهير کې د زده کوونکو فعال ساتل د تدريسي پلان برخه ګرځېدلې ده.

هيله من يم دا کتاب له لارښوونو او تعليمي پلان سره سم د فعالې زده کړې د ميتودونو د کارولو له لارې تدريس شي او د زده کوونکو ميندې او پلرونه هم د خپلو لوڼو او زامنو په باکيفيته ښوونه او روزنه کې پرله پسې ګډه مرسته وکړي چې د پوهنې د نظام هيلې ترسره شي او زده کوونکو او هېواد ته ښې برياوې ور په برخه کړي.

پر دې ټکي پوره باور لرم چې زموږ ګران ښوونکي د تعليمي نصاب په رغنده پلي کولو کې خپل مسؤوليت په ريښتوني توګه سرته رسوي.

د پوهنې وزارت تل زيار کاږي چې د پوهنې تعليمي نصاب د اسلام د سپېڅلي دين له بنسټونو، دوطن دوستۍ د پاک حس په ساتلو او علمي معيارونو سره سم د ټولنې د څرګندو اړتياوو له مخې پراختيا ومومي.

په دې ډګر کې د هېواد له ټولو علمي شخصيتونو، د ښوونې او روزنې له پوهانو او د زده کوونکو له ميندو او پلرونو څخه هيله لرم چې د خپلو نظريو او رغنده وړانديزونو له لارې زموږ له مؤلفانو سره د درسي کتابونو په لا ښه تاليف کې مرسته وکړي.

له ټولو هغو پوهانو څخه چې د دې کتاب په چمتو کولو او ترتيب کې يې مرسته کړې، له ملي او نړيوالو درنو مؤسسو او نورو دوستو هېوادونو څخه چې د نوي تعليمي نصاب په چمتو کولو او تدوين او د درسي کتابونو په چاپ او وېش کې يې مرسته کړې ده، مننه او درناوی کوم.

ومن الله التوفيق

فاروق وردګ

د افغانستان د اسلامي جمهوريت د پوهنې وزير

فهرست

مـخ

لومړی څپرکی: دایره ۱

- د دایرې عناصر، د یوې مستقیمې کرښې حالتونه، دایرې موقعیت نظر یو بل ته
- په دایره پورې اړوند زاویې
- د دایرې د وتر او شعاع ځانګړتیاوې
- د دایرې محیطي او مماسي زاویې

دویم څپرکی: په یوه دایره کې د اوږدوالی اړیکې
۲۷

- د یوه ټکي طاقت نظر دایرې ته
- دایرې مماس کرښه، د دایرې داخلي او خارجي زاویه
- محیطي او محاطي دایره
- په دایره کی د مرسوم څلور ضلعی ځانګړتیاوې (خواص)
- د منظمې مضلع ترسیم، د د ایرې مساحت او محیط

دریم څپرکی: تحلیلي هندسه ۵۵

- د دوو ټکو تر منځ فاصله یا واټن
- د یوې قطعه خط د منځنی ټکي مختصات
- د مستقیمې کرښې میل، د موازي او عمود کرښو میلونه
- د مستقیمې کرښې معادله، د هغې مستقیمې کرښې معادله چې میل او یو ټکی یې معلوم وي
- د مستقیمې کرښې عمومي معادله
- د خطي معادلاتو سیستم
- د خطي معادلاتو د سیستم حل د تعویضي او افنا په لاره (طریقه)
- تغییر مکان، انتقال، انعکاس او دوران

څلورم څپرکی: مثلثات ۹۵

د تالس قضیه

- د حاده زاویې ساین، کوساین او تانجنت
- د ځینو خاصو زاویومثلثاتي نسبتونه، د میل او تانجنت تر منځ اړیکې
- مثلثاتي جدول، د قایم الزاویو مثلثونو حل

• مثلثاتي معادلې

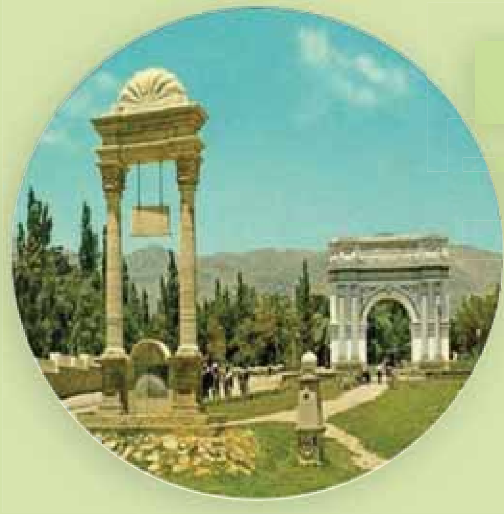
فهرست

	مــخ
پنځم څپرکی: خو جمله یي ګاني	۱۲۷
• په فکتورونو تجزیه	
• د الجبري افادو ضرب، د مکعبونو مجموعه او تفاضل	
• کوچني ګډ مشترك مضرب	
• د الجبري افادو ویش	
• په الجبري افادو کې د عملیو د سرته رسولو ترتیب	
شپږم څپرکی: نامساوات	۱۵۱
• د خطي غیر مساواتو حل	
• فاصله یا انتروالونه	
• د بینوم د علامې ټاکل، د کسر افادي اشاره ټاکل	
• کسري نامساواتونه، دوه متحوله خطي نامساوات	
• د نامساواتو سیستمونه	
اووم څپرکی: یو مجهوله دویمه درجه معادلې	۱۷۵
• د دویمې درجې معادلو حل	
• غیر خطي اړیکې	
• په هندسي لاره د دویمې درجې معادلو حل د محمد بن موسی فورمول، تکمیل مربع	
اتم څپرکی: احصائیه	۱۹۵
• د data د دسته بندي لاره، د نښتو یا پیوسته data ګانو دسته بندي او وزني اوسط	
• مستطیلي او دایروي ګرافونه	
• میانه، د تحول ساحه او د انحراف اوسط	
نهم څپرکی: احتمالات	۲۲۱
• د ناخاپه پېښو اتحاد او تقاطع	
• کلي او مکمله سټ	
• په سټونو مدل جوړول	

لومړی څپرکی

دایـــره

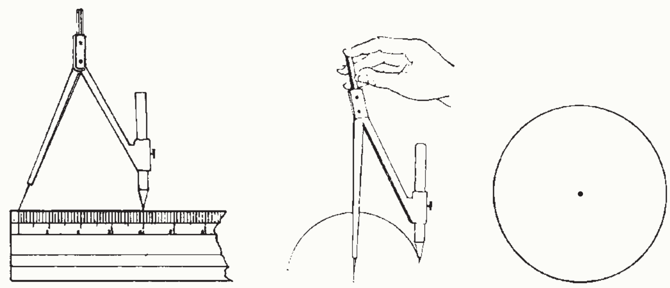
دایره
CIRCLE



شکل ته پام وکړئ هغه هندسي شکلونه چې په تصویر کې وینئ نمونه یې واخلئ.

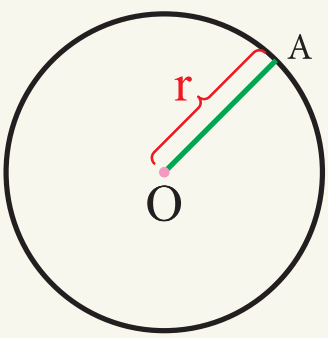
فعالیت

یوه ټکی د کاغذ پر مخ وټاکئ، ددې ټکي شاوخواته د 1cm په اوږدوالی د پرکار خوله خلاصه او هغه ته یو بشپړ دوران ورکړئ، لاسته راغلی شکل او ټاکل شوی ټکی څه نومېږي؟

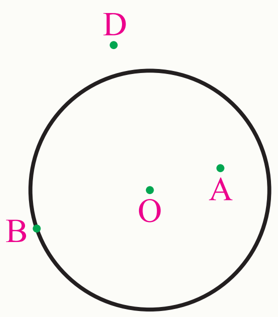


تعریف

په یو مستوي کې د هغو ټولو ټکو سټ چې له یوه ټاکلي ټکي نه مساوي واټن (فاصله) ولري دایره نومېږي، یا په بل عبارت دایره دیوې ترلې منحنی څخه عبارت ده چې له یوه ټاکلي ټکي څخه مساوي واټن ولري.
ترلې منحنی ته د دایرې محیط او ټاکلي ټکي ته د دایرې مرکز وایي چې په $C(O,r)$ ښودل کېږي.
د دایرې مرکز په شکل کې O او شعاع یې د r په توروو ښودل کېږي.



فعالیت



- په لاندې شکل کې د A ، B او D د ټکو ځایونه(موقعیت) نظر O دایرې ته وټاکي.
- د هغو ټکو واټن د دایرې د مرکز څخه اندازه او د دایرې د شعاع له اوږدوالي سره پرتله کړې.
- په خپله خوښه درې نور ټکي چې په دایره کې دننه او له دایرې څخه بهر پراته وي په پام کې ونیسئ. ایا لاسته راغلې اړیکې د دې ټکو لپاره هم سمې دي؟

پایله:

1- د هغو ټکو سټ چې فاصله یې د دایرې له مرکز څخه د دایرې د شعاع څخه کوچنۍ وي، د دایرې داخلي ساحه(منځ) بلل کېږي، یا $I = \{A / |\overline{OA}| < r\}$

2- د هغو ټکو سټ چې فاصله یې د دایرې له مرکز څخه د دایرې له شعاع سره مساوي وي، د دایرې محیط یا مخ ویل کېږي، یا $C = \{B / |\overline{OB}| = r\}$

3- د هغو ټکو سټ چې فاصله یې د دایرې له مرکز څخه د دایرې د شعاع څخه لوی وي، د دایرې د خارجي یا باندنۍ ساحې په نامه یادېږي، یا $E = \{D / |\overline{OD}| > r\}$

4- د مستوي هغه برخه چې د دایرې د محیط او دهغې د اخلي سطحې په واسطه جلا شوې وي، د دایرې د سطحې په نوم یادېږي.

پوښتنې

1- یوه دایره د $2cm$ په شعاع رسم کړئ. دلاندې ټکو څخه کوم یو یې د دایرې په داخل، خارج او په محیط کې پروت دی:

- د A ټکي واټن د دایرې له مرکز څخه $1.4cm$ دی.
- د B ټکي واټن د دایرې له مرکز څخه $2.3cm$ دی.
- د C ټکي واټن د دایرې له مرکز څخه صفر دی.
- د D ټکي واټن د دایرې له مرکز څخه $\frac{4}{2}cm$ دی.

2- په کوم حالت کې یو ټکی د دایرې پر محیط پروت وي.

د دایرې عناصر
Elements of a Circle

شکل ته پام وکړئ د کیک مخ کوم هندسي شکل را ښیي او پرې شوې برخه یې د دایرې کوم عنصر راښیي؟

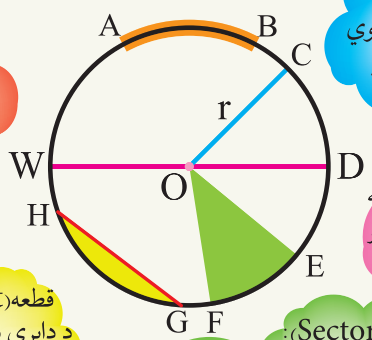
د دایرې د عناصرو تعریف

لومړی شکل او د دایرې د عناصرو تعریفونه خپلو کتابچوته نقل او ورسته لاندې تعریفونه د شکل له اړوند عناصرو سره په خپلو کتابچو کې ونښلوئ.

قوس(Arc): د دایرې د محیط یوه برخه د دایرې د قوس په نوم یادیږي.

شعاع(Radius): هغه کرښه چې د دایرې مرکز د محیط له یو ټکي سره نښلوي د دایرې شعاع بلل کیږي.

وتر(Chard): هغه قطعه خط چې د دایرې محیط دوه ټکي ونښلوي د دایرې وتر بلل کیږي.



قطر(Diameter): هغه وتر چې د دایرې د مرکز څخه تیر شي، د دایرې قطر بلل کیږي او اوږوالی یې د شعاع دوه برابر وي.

قطعه(Segment): د دایرې د سطحې یوه برخه چې د وتر په واسطه د دایرې له سطحې څخه جلا شوې وي د دایرې د قطعې په نوم یادیږي.

قطاع(Sector): د دایرې د سطحې یوه برخه چې د دوو شعاعګانو یا ورانګو او اړوند قوس په واسطه د دایرې له سطحې څخه جلا شوې وي.

فعالیت

- د 4cm شعاع په اندازه یوه دایره رسم او له کاغذ څخه هغه پرې کړئ.
- د غه دایره داسې قات کړئ چې دواړه نیمې دایرې یو پر بل منطبقې شي.
- کاغذ خلاص کړئ، د کاغذ پر مخ قات شوې کرښه د څه په نامه یادېږي.
- دا ځل دوه نیمې دایرې بیا قات او قات کاغذ داسې خلاص کړئ، چې څلور مساوي برخې لاسته راغلې وي. څو قطعه خطونه(ټوټه کرښې)وینئ. هر یو د څه په نامه یادېږي؟
- څلور لاسته راغلې زاویې اندازه کړئ، او وواياست چې یو له بل سره څه اړیکې لري؟
- د یوې دایرې د قطر او شعاع تر منځ اړیکې څه دي؟
- دایره داسې قات کړی چې دوه نامساوي برخې جوړې شي، هغه خلاصه کړئ جوړه شوې کرښه د څه په نامه یادېږي؟ د هغې اوږدوالی د دایرې د قطر سره پرتله کړئ.

پایله:

- ومو لیدل چې په هره دایره کې که چیرې د دایرې د محیط دوه ټکي ونښلوو د دایرې وتر لاسته راځي.
- په هره دایره کې ترټولو لوی وتر، د دایرې قطر دی چې د شعاع دوه برابره دی.
- د یوې دایرې هر قطر، وتر اما هر وتر قطر نه دی.
- هغه قوس چې د یوې دایرې د محیط له نیمایي څخه کوچنی وي د کوچنی قوس (minor Arc) په نوم یادېږي.
- هغه قوس چې د یوې دایرې د محیط له نیمایي څخه لوی وي د لوی قوس (major Arc) په نوم یادېږي.

پوښتنې

1- د $C(0,4)$ دایره رسم کړئ.

a) د دایرې شعاع یا وړانګه، قطر، قطعه او قطاع په شکل کې و ښیئ.

b) د دایرې د قطر اوږدوالی وټاکئ.

c) د دایرې محیط په څلور مساوي برخو وویشئ، ددې څخه څه پایله په لاس راځي؟

d) د دایرې داخلي ناحیه، خارجي ناحیه او د دایرې محیط د مختلفو رنګونو، په واسطه په نښه کړئ.

د دایرې سره د یوې مستقیمې کرښې حالتونه

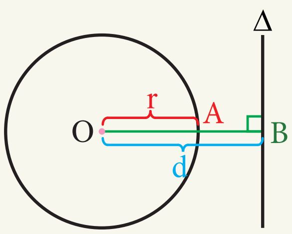
مخامخ شکل ته پام وکړئ او وایاست چه قلمونه او هندسي بکس له دایرې سره څه اړیکې لري هره یوه توضیح کړئ؟

فعالیت

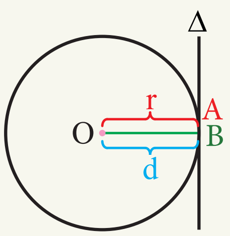
- یوه دایره او مستقیمه کرښه داسې رسم کړئ چې د دایرې سره یوټکی، دوه ټکي او هیڅ ګډ(مشترک) ټکی و نلري.
- د دایرې له مرکز څخه په هره مستقیمه کرښه باندې عمودي کرښې رسم کړئ، د دایرې د مرکز اوکرښې تر منځ واټن اندازه کړئ او هر حالت د دایرې د شعاع له اوږوالی سره پرتله کړئ.

د پورتنی فعالیت دکړنې څخه لیدل کېږي چې یو مستقیمه کرښه او دایره نظر یو بل ته درې لاندې حالتونه لري:

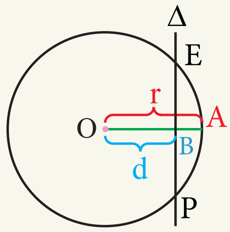
1- که چیرې مستقیمه کرښه له دایرې سره ګډ ټکی و نلري، مستقیمه کرښه له دایرې نه بهر پروت دی، په دې حالت کې د مستقیمې کرښې واټن د دایرې له مرکز څخه د دایرې د شعاع څخه لوی دی یعني: $d > r$



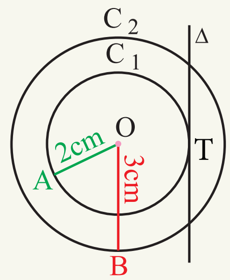
2- که چیرې مستقیمه کرښه د دایرې سره یو ګډ ټکی ولري نو مستقیمې کرښې ته پر دایره مماس وایي. په دې حالت کې د مستقیمې کرښې واټن د دایرې له مرکز څخه د دایرې د شعاع سره برابر ده یعني: $d = r$



3- که چیرې یو مستقیم د دایرې سره دوه ګډ(مشترك) ټکي ولري، مستقیم ته د دایرې غوڅې(قاطع) وایي، په دې حالت کې د مستقیم واټن د دایرې له مرکز څخه د دایرې له شعاع کوچنی دی، یعنې $d < r$



مثال(بېلګه): د (O) ټکی په پام کې نیسو، د (O) په مرکز د 2 او 3 سانتي متره په شعاع دوې متحدالمرکز دایرې رسم کړئ د مستقیمې کربښې واټن د دایرې له مرکز څخه د C_1 او C_2، دوو دایرو له ورانګو سره څه اړیکې لري؟



حل: په شکل کې لیدل کېږي چې د Δ مستقیم واټن د C_1 دایرې له مرکز څخه د هغې دایرې د ورانګې یا شعاع سره برابر دی یعنې: $d = r$

د Δ مستقیم واټن د C_2 دایرې له مرکز څخه د هغې دایرې له ورانګې یا شعاع څخه کوچنی دی یعنې: $d < r$

پوښتنې

د $3cm$ شعاع په اوږدوالی یوه دایره رسم کړئ، په دې دایره کې کربښې په لاندینیو راکړل شویو واټنو رسم او حالتونه یې څرګند کړئ:

الف: د کربښې واټن د دایرې له مرکز څخه $2.5cm$ وي.

ب: د کربښې واټن د دایرې له مرکز څخه $4cm$ وي.

ج: د کربښې واټن د دایرې له مرکز څخه د دایرې له شعاع سره برابره وي.

د دايرو موقعيت نسبت يو بل ته

مخامخ شکل ته په پام سره ووايئ چې:

1- د بايسيکل ټايرونه کوم هندسي شکل لري؟

2- ټايرونه يو بل سره څو حالتونه غوره کولای شي؟ توضيح يې کړئ.

فعاليت

- دوې دايرې داسې رسم کړئ چې:

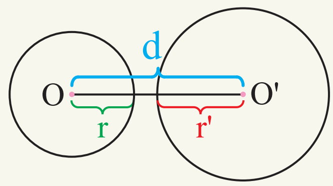
1: يو له بل سره يو ګډ ټکی ولري.

2: دوه ګډ ټکي ولري.

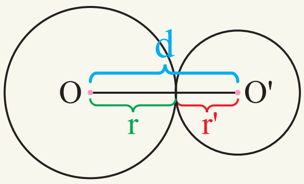
3: يو بل سره ګډ ټکي و نلري.

- د دايرو د مرکزونو تر منځ اوږدوالی په پورته حالتونو کې د هغو له شعاع سره پرتله کړئ.

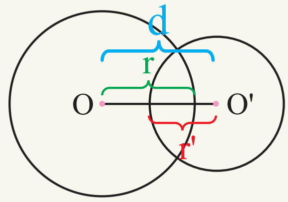
د پورتنی فعاليت څخه لاندې پايلې په لاس راځي چې:



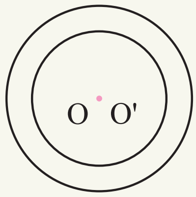
که چيرې د دوو دايرو د مرکزونو ترمنځ واټن، دهغو د شعاع د مجموعي له اوږدوالي څخه زيات وي په دې حالت کې دايرو ته ناپرېکړې يا نا متقاطع دايرې وايي، يعني $d > r + r'$



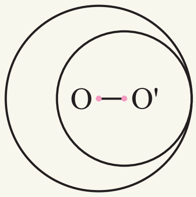
که چيرې د دوو دايرو د مرکزونو تر منځ واټن د هغو د شعاع له مجموعې سره مساوي وي. په دې حالت کې دايرو ته خارجا مماس وايي، يعني $d = r + r'$



کــه د دوو دایــرو د مرکزونــو تــر منــځ واټــن، د هغــو د شــعاعګانو د مجموعــې د اوږدوالــې څخــه کوچنــې او د شــعاع ګانو د تفریق د حاصل د مطلقه قیمت څخه لوی وي. دایــرې یو له بل ســره متقاطع دي، یعنې $|r-r'|<d<r+r'$



که د دوو دایرو د مرکزونو تر منــځ واټــن صفر وي، دایــرې د متحدالمرکــز پــه نامــه ســره یادېــږي، یعنې $d=0$

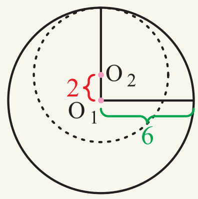


کــه د دوو دایــرو د مرکزونــو ترمنــځ واټن د هغو د شــعاع ګانو د تفریق حاصل له مطلقه قیمت سره مساوي وي. دایرو ته له دننه مماس وایي، یعنې
$d=|r-r'|$

مثال(بیلګه): دوې دایرې داســې رســم کــړئ، چې د لومړې دایرې شــعاع $6cm$ ، د دویمې دایرې او لومړې دایرې مرکزونو تر منځ واټن 2cm او د دویمې دایرې شــعاع د لومړې دایرې د شعاع $\frac{2}{3}$ برابره وي، په دې حالت کې د دې دوو دایرو موقعیت نظر یو بل ته پیدا کړئ؟

حل: که د لومړنۍ دایرې شعاع r_1 او د دویمې دایرې شعاع r_2 ونوموو نو لرو:

$$\left.\begin{matrix} r_1 = 6cm \\ r_2 = \frac{2}{3}r_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} r_2 = \frac{2}{3}\times 6 \\ r_2 = 4cm \end{matrix}$$



$$d=|r_1-r_2|=|6-4|=|2|=2$$

څرنګه چې:
نو له دایرې سره داخلاً مماس دي.

پوښتنې

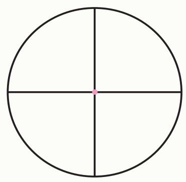
۱- دوې دایرې د ٦cm او ٤cm په شعاع په پام کې و نیسئ او په لاندې توګه یې رسم کړئ.

الف: دایرې خارجاً (له باندې) سره مماس دي.
ب: دایرې داخلاً(له دننه) سره مماس وي.
ج: دایرې سره غیر متقاطع(ناپرېکړې) وي.
د: دایرې سره غیر متقاطع(غوڅو نه) وي.
هـ: دایرې متحدالمرکزه(ګډ مرکز) وي.
و: پورتنې حالتونه په خپله ژبه ووایئ.

د دایرې اړوند زاویې
Angle of a Circle

تصویر ته پام وکړئ هغه هندسي شکلونه چې په هغه کې لیدل کېږي نوم یې واخلئ؟

فعالیت



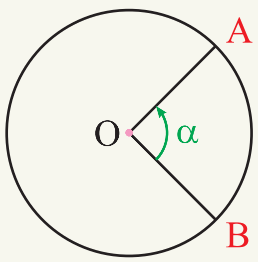
- په پورتنی شکل کې څو زاویې لیدلای شئ.
- د دې زاویو ګډ خاصیتونه کوم دي بیان یې کړئ؟
- د $C(0,3)$ دایره رسم کړئ.
- په دې دایره کې یو پر بل دوه عمود قطرونه رسم کړئ.
- څو مرکزي زاویې لاسته راځي؟ د هرې زاویې د مقابل قوس اندازه څو درجې دی؟
- د دې دایرې محیط څو درجې دی؟

د پورتني فعالیت له نتیجې څخه لیکلای شو چې:

د یو قوس اوږدوالی د هغه د مرکزي زاویې په پراخوالي پورې اړه لري، یعني:

$$\frac{\hat{AOB}}{360^\circ} = \frac{\text{طول قوس}}{\text{محیط دایره}}$$

تعریف



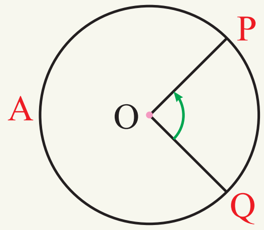
هغه زاویه چې راس یې د دایرې په مرکز پروت، او ضلعې یې د دایرې شعاعګانې وي مرکزي زاویه بلل کېږي لکه: د $\hat{AOB}$ یا د $\hat{\alpha}$ زاویه.

هره مرکزي زاویه له دایرې څخه یو قوس بېلوي، چې دغه قوس د خپلې مخامخ مرکزي زاویې مساوي اندازه لري، لکه: د $\overset{\frown}{AB}$ قوس چې د α زاویې سره مساوي دي.

د قرارداد له مخې ویلای شو چې په یوه دایره کې د مخامخ قوس اندازه د درجې له مخې د مرکزي زاویې سره مساوي ده یعنې: $A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB} = \hat{\alpha}$

لومړی مثال: که د $C(O, r)$ په دایره کې لوی قوس (major) د کوچني قوس (minor) پنځه برابره وي نو د کوچني قوس، لوی قوس او د هغې د مرکزي زاویو اندازه پیدا کړئ.

حل: که کوچنی قوس $\overset{\frown}{PQ}_{minor} = x$ وي، نو لوی قوس یې $\overset{\frown}{PAQ}_{major} = 360^\circ - x^\circ$ دی نو لیکلای شو، چې:



$\overset{\frown}{PQ} + \overset{\frown}{PAQ} = 360^\circ$

$\overset{\frown}{PAQ}_{maj} = 5\overset{\frown}{PQ}_{min}$

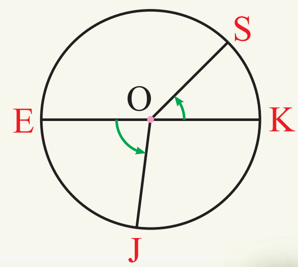
$x + 5x = 360^\circ$

$6x = 360^\circ$

$x = 60^\circ \quad \Rightarrow P\hat{O}Q = x = 60^\circ$

$\overset{\frown}{PAQ} = 5x = 5 \times 60 = 300^\circ$

دویم مثال: په لاندې شکل کې که $K\hat{O}S = 31^\circ$ ، $\overline{EK}, E\hat{O}J = 82^\circ$ د دایرې قطر وي. د $\overset{\frown}{SJ}, \overset{\frown}{KJ}, \overset{\frown}{SK}$ د $\overset{\frown}{EK}$ قوسونه په درجه پیدا کړئ.



د مرکزي زاویې مخامخ قوس .....

$\overset{\frown}{SK} = S\hat{O}K = 31^\circ \quad \Rightarrow \overset{\frown}{SK} = 31^\circ$

$K\hat{O}J = 180^\circ - E\hat{O}J = 180^\circ - 82^\circ = 98^\circ$

$K\hat{O}J = \overset{\frown}{KJ} = 98^\circ$

$\overset{\frown}{SJ} = \overset{\frown}{SK} + \overset{\frown}{KJ} = 31^\circ + 98^\circ = 129^\circ$

$\overset{\frown}{JE} = E\hat{O}J = 82^\circ$

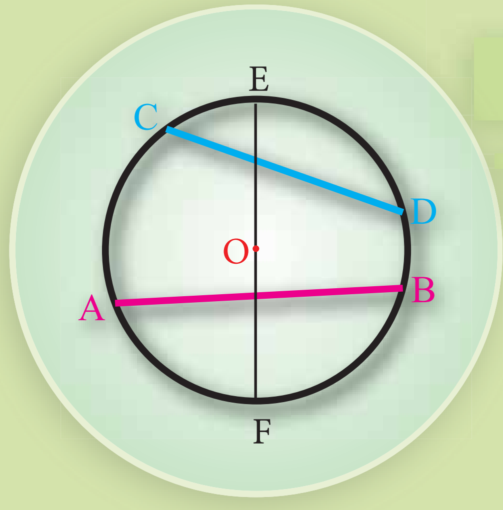
$\overset{\frown}{EK} = E\hat{O}K = 180^\circ$

پوښتنې

1- د B, A او C درې ټکي د $C(O,r)$ پر دایره داسې پراته دي، چې $A\hat{O}B = 75^\circ$ ، $B\hat{O}C = 136^\circ$ زاویې د OB دواړو خواوو ته پرتې وي $\overset{\frown}{AC}$ حساب کړئ.

2 - یوه مرکزي زاویه د 180° په اندازه رسم کړئ.

د دايرې د وتر خواص



شکل ته پام وکړئ، د $\overline{AB}$ ، $\overline{CD}$ او $\overline{EF}$ مستقيمې کرښې په څه نامه يادېږي؟ د $\overline{EF}$ کرښې ځانګړتيا څه ده؟ او له $\overline{AB}$ کرښې سره څه اړيکه لري؟

فعاليت

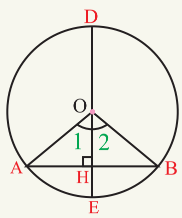
- د $C(O,r)$ په دايره کې د $\overline{AB}$ وتر رسم کړئ.
- د دايرې د $\overline{ED}$ قطر داسې رسم کړئ چې د $\overline{AB}$ په وتر د H په نقطه عمود وي.
- د (O) ټکي د A او B سره ونښلوئ، لاسته راغلي مثلث څه ډول مثلث دی.
- په لاندې تش ځايونو کې د($=,<$ يا $>$) ور ننبي وليکئ.

$\overline{OA}$ ☐ $\overline{OB}$, $\overset{\frown}{AE}$ ☐ $\overset{\frown}{EB}$, $\overline{AH}$ ☐ $\overline{HB}$

د دې فعاليت د پايلې څخه کولای شو لاندې قضيه بيان او ثبوت کړو.

قضيه: په هره دايره کې په وتر عمود قطر، وتر او د هغې مقابل قوس نيموي.

ثبوت: د $\overset{\Delta}{BOH}$ او $\overset{\Delta}{AOH}$ دوو مثلثونو څخه ليکلی شو چې:



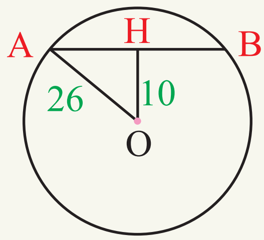
$$\left.\begin{array}{ll} \overline{OA}=\overline{OB}\ldots\ldots\ldots & \text{د دايرې شعاع} \\ \hat{H}_1=\hat{H}_2\ldots\ldots\ldots & \text{قايمه} \\ \overline{OH}=\overline{OH}\ldots\ldots\ldots & \text{مشترک} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{AOH} \cong \overset{\Delta}{OHB}$$

نو د دوو مثلثونو د تساوي څخه داسې پايله لاسته راځي، چې: $\overline{AH}=\overline{HB}$ او د $\overset{\Delta}{AOH}$ او $\overset{\Delta}{BOH}$ مرکزي زاويې سره مساوي دي په پايله کې $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{EB}$ دی.

مثال: د $C(O,26)$ دايره راکړل شوي ده، که چېرې پر وتر د عمود اوږدوالی د دايرې له مرکز څخه (۱۰) واحده وي د $\overline{AB}$ وتر اوږدوالی حساب کړئ.

حل: د $\overset{\Delta}{OAH}$ په مثلث کې د فیثاغورث د قضیې له مخې لرو چې:

$$\overline{OA}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{OH}^2$$
$$(26)^2 = \overline{AH}^2 + (10)^2$$
$$\overline{AH}^2 = (26)^2 - (10)^2$$
$$\overline{AH}^2 = 676 - 100 = 576$$
$$\overline{AH} = 24$$
$$\overline{AB} = 2\overline{AH} = 2 \times 24 = 48\,\text{unit}$$



فعالیت

- د $C(0,3)$ دایره رسم کړئ.
- په دایره کې د $\overline{PQ}$ او $\overline{ER}$ دوه مساوي وترونه رسم کړئ.
- د دایرې له مرکز څخه د $\overline{PQ}$ او $\overline{ER}$ په وترونو عمودونه رسم او اوږدوالی یې معلوم کړئ.

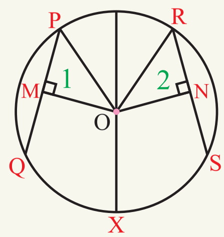
د دې فعالیت له پایلې څخه لاندې قضیه بیان او ثبوتوو.

قضیه: په هره دایره کې د هغې مساوي وترونه، د دایرې له مرکز څخه مساوي واټن لري.

ثبوت: د $\overset{\Delta}{RON}$ او $\overset{\Delta}{POM}$ د دوو مثلثونو څخه لرو چې

$\overline{OP} = \overline{OR}$ .... د دایرې شعاع
$\hat{1} = \hat{2}$ .... قایمه
$\overline{PQ} = \overline{RS}$ .... مساوي وترونه
$\frac{\overline{PQ}}{2} = \frac{\overline{RS}}{2} \Rightarrow \overline{PM} = \overline{RN}$

$\Longrightarrow \overset{\Delta}{POM} \cong \overset{\Delta}{RON}$, $\overline{OM} = \overline{ON}$



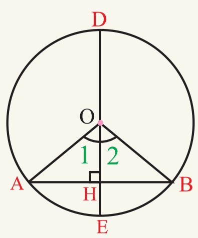
په پایله کې وبولای شو چې په هره دایره کې مساوي وترونه له مرکز څخه مساوي واټن لري.

پوښتنې

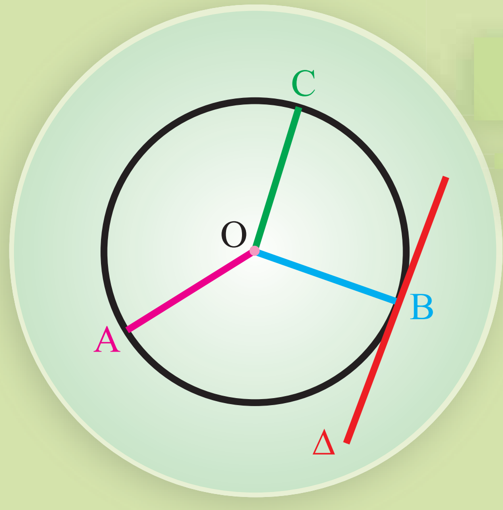
1- د $C(0,13)$ په دایره کې د $\overline{AB}$ وتر د دایرې له مرکز څخه 5 واحده واټن لري د $\overline{AB}$ اوږدوالی پیدا کړئ.

2- که چیرې د یوې دایرې قطر د وتر له نیمایي څخه تېر شي، ثبوت کړئ چې پر وتر عمود دی.

3- په یوه دایره کې $\overline{AB} = 8cm$ وتر رسم کړئ. که چیرې د وتر عمودي فاصله له مرکز څخه $\overline{OH} = 3cm$ وي د دایرې قطر او محیط محاسبه کړئ.

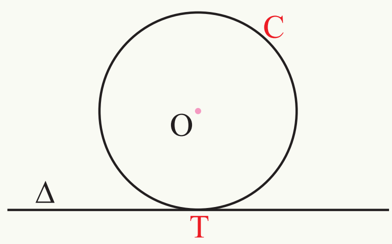


د دایرې د شعاع خواص



شـکل ته په پـام د OA، OB او OC کرښې څه نومیږي او د Δ کرښه د دایرې او د OB ورانګـې سـره څـه اړیکـې لري؟

فعالیت



- په مخامخ شکل د (Δ) مستقیمه کرښه د $C(0,2)$ دایرې د T په ټکي کې مماس دی د A, B, C او D ټکي د مماس پر مخ د T ټکي دواړو خواوو کې وټاکئ او د دایرې له مرکز سره یې ونښلوئ.
- تو ټه کرښې یا قطعه خطونه د خط کش په مرسته اندازه کړئ.
- د دایرې د مرکز او مماس تر منځ لنډې واټن وښایئ. تر ټولو کوچنی فاصله د یوه ټکي او یوې مستقیمې کرښې تر منځ کومه فاصله ده؟
- د پورتني دوو حالتونو څخه څه پایله لاسته راوړئ.

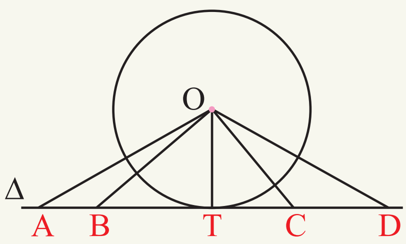
د دې فعالیت د پایلې څخه په لاندې توګه قضیه بیان او ثبوتوو.

قضیه: د دایرې شعاع د تماس په ټکي کې پر مماس عمود دی.

پایله: په لاندې شکل کې لیدل کیږي، چې:

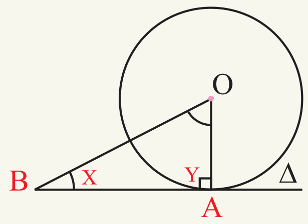
$\overline{OT} < \overline{OB} < \overline{OA}$

$\overline{OT} < \overline{OC} < \overline{OD}$



پوهیږو چې تر ټولو کوچنی فاصله د یوه ټکي او مستقیم ترمنځ عمودي فاصله ده. په پایله کې ویلای شو چې مستقیمې کرښې: $\overline{OT} \perp \Delta$ دی.

لومړی مثال: په لاندې شکل کې د Δ مستقیمه کرښه د A په ټکي د $C(O,r)$ پر دایره مماس دی. که چیرې د $A\hat{O}B$ مساوي 60° وي، د x زاویه پیدا کړئ.



$OA \perp BA \Rightarrow \hat{y} = 90^\circ$

$\hat{o} + \hat{x} + \hat{y} = 180^\circ$

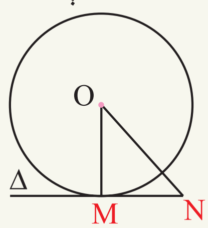
$60^\circ + \hat{x} + 90^\circ = 180^\circ$

$x = 180^\circ - 150^\circ$

$x = 30^\circ$

دویم مثال: په لاندې شکل کې د Δ مستقیمه کرښه د $C(O,r)$ پر دایره مماس دي، که $\overline{OM} = 4unit$ او $\overline{ON} = 5unit$ اوږدوالی ولري د $\overline{MN}$ اوږدوالی پیدا کړئ.

حل: پوهیږو چې د دایرې شعاع د تماس په ټکي پر مماس عمود دی په پایله کې د $O\overset{\Delta}{M}N$ په قایم الزاویه مثلث کې د فیثاغورث د قضیې په اساس لرو چې:



$\overline{ON}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MN}^2$

$\overline{MN}^2 = \overline{ON}^2 - \overline{OM}^2$

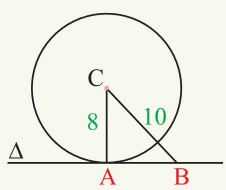
$\overline{MN}^2 = 5^2 - 4^2 = 9$

$\overline{MN} = 3$

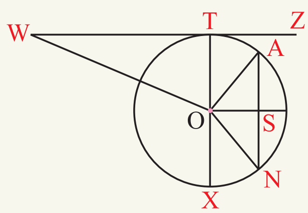
- د دایرې شعاع د تماس په ټکي کې پر مماس عمود وي.
- هر مماس په هغه شعاع چې د تماس د ټکي څخه تیریږي عمود دی.

پوښتني

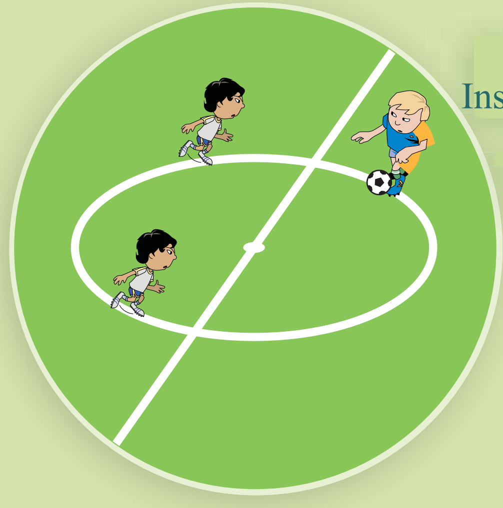
1- په مخامخ شکل کې د Δ د $P(C,r)$ پر دایرې مماس دی، که $\overline{AC} = 8unit$ او $\overline{BC} = 10unit$ اوږدوالی ولري. د $\overline{AB}$ اوږدوالی پیدا کړئ.



2 - په مخامخ شکل کې که $\overline{WZ}$ د T په ټکي د $C(O,r)$ پر دایرې مماس وي، $\overline{OS} = 1unit$ ، TW=3unit وي د $\overline{OA}, \overline{AS}, \overline{SN}, \overline{OW}$ او $\overline{TX}$ اوږدوالی پیدا کړئ.



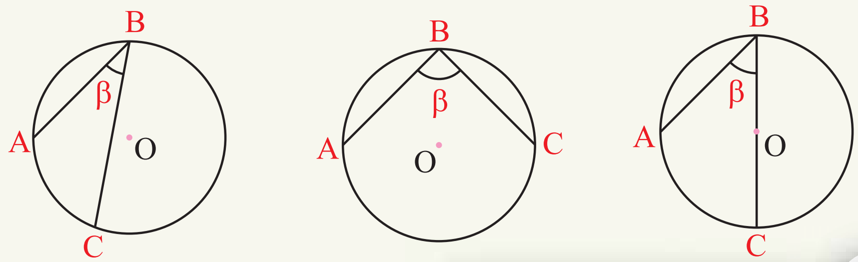
د دایري محیطي زاویه
Inscribed Angel of a Circle



د فوټبال د میدان په مرکزي دایره کې حسیب الله، بلال ته او بلال الیاس ته توپ پاس کړ. هغه شکل چې د توپ د شوټ د مسیر څخه جوړېږي څه ډول دی؟

تعریف

هغه زاویه چې راس یې د دایرې پر محیط او ضلعې یې د دایرې دوه وترونه وي محیطي زاویه بلل کېږي. لکه: د $\hat{ABC}$ یا د $\hat{\beta}$.



فعالیت

- د $C(O,r)$ په دایره کې د $\hat{ABC}$ محیطي زاویه، چې د $\overline{BC}$ ضلع د دایرې له مرکز څخه تیره شي رسم کړئ.
- د A ټکی د دایرې له مرکز (O) سره ونښلوئ څرنګه مثلث لاسته راځي.
- د $\hat{A}$ او $\hat{B}$ زاویې د $\hat{OAB}$ په مثلث کې یو له بل سره څه اړیکې لري؟
- د $\hat{AOC}$ زاویه د $\hat{A}$ او $\hat{B}$ زاویو سره څه اړیکې لري؟

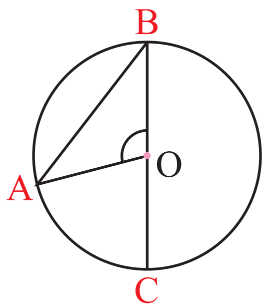
په یاد ولرئ چې:
- د مرکزي زاویې پراخوالی د خپل مخامخ قوس سره مساوي دی.
- په هر مثلث کې د خارجي زاویې پراخوالی د دوو داخلي پرته له مجاورې زاویې له مجموعې سره مساوي دی.

د مخکینی مخ فعالیت د پایلې څخه په لاندې توګه قضیه بیان او ثبوتوو.

قضیه: د هرې محیطي زاویې پراخوالی د خپل مخامخ قوس نیمایي دی.

دلته قضیه په هغه حالت کې ثبوتوو چې د محیطي زاویې یوه ضلع د دایرې قطر وي. د دوو نورو حالتونو ثبوت د کورنی دندې په توګه زده کوونکو ته پاتې شو.

ثبوت: د $\hat{AOC}$ زاویه د $\overset{\triangle}{AOB}$ د مثلث خارجي زاویه ده، لیکلای شو چې:



مرکزي زاویه ..... $\hat{AOC} = \overset{\frown}{AC}$

$\hat{AOC} = 2\hat{B}$

نو: $\overset{\frown}{AC} = 2\hat{B}$

په پایله کې $\hat{ABC} = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{AOC} = \hat{A} + \hat{B} \\ \hat{A} = \hat{B} \text{ ..... ولي} \\ \hat{AOC} = \hat{B} + \hat{B} \\ \hat{AOC} = 2\hat{B} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

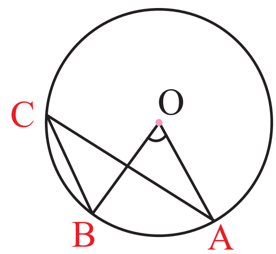
د $\hat{ABC}$ د محیطي زاویې پراخوالی د $\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ سره برابر دی.

مثال: د $C(O,r)$ په دایره کې که مرکزي زاویه $\hat{AOB} = 60^\circ$ وي د $\hat{ACB}$ محیطي زاویې مخامخ قوس $\overset{\frown}{AB}$ یې پیدا کړئ.

حل: په یوه دایره کې د مرکزي زاویې او د هغې د مخامخ قوس د اړیکو څخه لیکلی شو چې:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{AOB} = 60^\circ \\ \hat{AOB} = \overset{\frown}{AB} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 60^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\frown}{AB} = 60^\circ \\ \hat{ACB} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{ACB} = \dfrac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

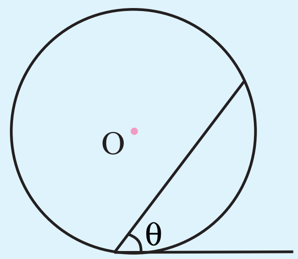


پوښتني

1 - په یوه دایره کې د 90° په اندازه محیطي زاویه رسم کړئ.

2 - د دایرې پر محیط د A او B دوه ټکي په پام کې ونیسئ. د $\overset{\frown}{AB}$ د قوس په مقابل کې، څو محیطي زاویې رسمولای شو.

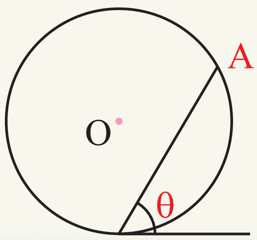
د دایرې مماسي زاویه



شکل ته پام وکړئ، هغه مستقیمې کرښې چې د θ زاویه یې جوړه کړې ده نوم واخلئ او د زاویې راس چېرته پروت دی.

تعریف

هغه زاویه چې یوه ضلع یې پر دایره مماس او دویمه ضلع یې د دایرې وتر وي او راس یې د تماس په ټکي کې پروت وي مماسي زاویه بلل کېږي، لکه: د θ زاویه



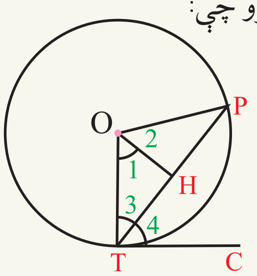
فعالیت

- د $C(0,6)$ دایره رسم کړئ.
- په دې دایره کې یوه مماسي زاویه رسم کړئ.
- د دایرې د وتر انجامونه د دایرې له مرکز سره ونښلوئ څه ډول مثلث لاسته راځي.
- د دایرې له مرکز څخه پر وتر عمود رسم کړئ.
- د $\hat{TOP}$ مرکزي زاویه او د $\hat{PTC}$ مماسي زاویې سره څه اړیکې لري.

د دې فعالیت د پایلې څخه لاندې قضیه ثبوتولې شو.

قضیه: په یوه دایره کې د مماسي زاویې پراخوالی د هغې د مخامخ قوس نیمایي په اندازه دی.

ثبوت: د $\overset{\Delta}{OHT}$ قایم الزاویه مثلث او $\hat{OTC}$ قایمې زاویې څخه لرو چې:

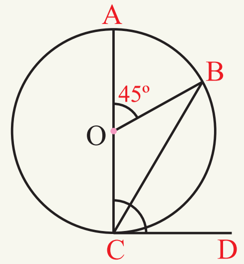


$$\left.\begin{array}{l}\hat{3}+\hat{1}=90^\circ\\ \hat{3}+\hat{4}=90^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{3}+\hat{1}=\hat{3}+\hat{4}\Rightarrow \hat{1}=\hat{4}$$

$$\hat{1}=\frac{P\hat{O}T}{2}=\frac{\overset{\frown}{PT}}{2}\Rightarrow P\hat{T}C=\frac{\overset{\frown}{PT}}{2}$$

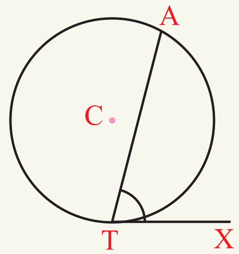
لومړی مثال: په لاندې شکل کې چې د $C(0,r)$ په دایره کې د هغې مرکزي زاویه 45° وي، د محیطي او مماسي زاویو پراخوالی پیدا کړئ.

حل: د مرکزي زاویې او دهغې د مخامخ قوس د اړیکو څخه په ګټه لیکلی شو چې:



دویم مثال: په لاندې شکل کې د $\overset{\frown}{AT}$ قوس اندازه $(2\alpha-6)^\circ$ ده، د $\hat{ATX}$ مماسي زاویې اندازه پیدا کړئ.

حل: د مماسي زاویې او دهغې د مخامخ قوس د اړیکو څخه د ګټې اخیستلو له مخې لیکلای شو، چې:



$$A\hat{T}X = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AT}$$

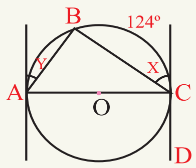
$$A\hat{T}X = \frac{1}{2}(2\alpha-6)^\circ$$

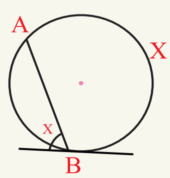
$$= (\alpha-3)^\circ$$

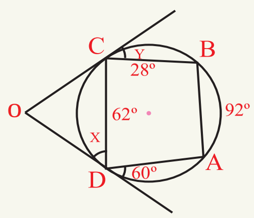
پایله: محیطي او مماسي زاویې چې د عین قوس په مقابل کې پرتې وي، سره مساوي دي.

پوښتنې

۱- د مماسي زاویو اندازه په لاندې شکلونو کې په لاس راوړئ.







د لومړي څپرکي لنډيز

- د هغو ټکو سټ یا هندسي محل چې د یوه ټاکلي ټکي نه مساوي واټن ولري دايره بلل کېږي.
- د هغو ټکو سټ چې واټن يې د دايرې له شعاع څخه کوچنی وي د دايرې دننه ساحه بلل کېږي.
- د هغو ټکو سټ چې واټن يې د دايرې له مرکز او د دايرې له شعاع سره مساوي وي د دايرې محيط يا مخ بلل کېږي.
- د هغو ټکو سټ چې فاصله يې د دايرې له مرکز څخه نسبت د دايرې شعاع ته لوي وي د دايرې باندنی ساحه بلل کېږي.
- د مستوي هغه برخه چې د منحني او د دايرې د داخلي سطحې په واسطه بېله شوې وي د دايرې سطحه بلل کېږي.
- هغه کرښه چې د دايرې مرکز او د محيط يو ټکی نښلوي د دايرې شعاع بلل کېږي.
- هغه ټوټه کرښه چې د دايرې د محيط دوه ټکي سره نښلوي ددايرې وتر بلل کېږي.
- د دايرې هغه وتر چې له مرکز څخه تيرېږي د دايرې قطر بلل کېږي. هر قطر د شعاع دوه برابره دی.
- د دايرې د محيط يوه برخه چې د دوو ټکو په مرسته بېله شوې وي قوس بلل کېږي.
- هغه کرښه چې له دايرې سره يو ګډ ټکی ولري مماس بلل کېږي.
- د دايرې قطعه: د دايرې هغه برخه چې د دايرې د وتر او اړونده قوس تر منځ پرته وي د دايرې قطعه بلل کېږي
- د دايرې يوه برخه ده چې د دوو شعاعګانو او اړوند قوس په مرسته د دايرې له سطحې څخه بېله شوې وي.
- که يو مستقيم له يوې دايرې سره يو ګډ ټکی ولري د مماس او که چيرې دوه ګډې ټکي ولري د قاطع په نوم يادېږي.
- په هره دايره کې د دايرې له مرکز څخه پر وتر عمودي کرښه، وتر او مخامخ قوس نيمايي کوي.

- د دایرې شعاع د تماس په ټکي کې پر مماس عمود دی.
- د یوې دایرې مساوي وترونه د هغې له مرکز څخه مساوي واټن لري.

هغه زاویه چې راس یې د دایرې په مرکز پروت او ضلعې یې د دایرې شعاعګانې وي مرکزي زاویه بلل کېږي.

- د هرې مرکزي زاویې اندازه د هغې د مخامخ قوس سره مساوي ده.
- د مرکزي زاویې د مخامخ قوس اوږدوالی د دې رابطې $\frac{A\hat{O}B}{360^\circ} = \frac{\text{د قوس اوږدوالی}}{\text{د دایرې محیط}}$ څخه په لاس راځي.

هغه زاویه ده، چې راس یې د دایرې پر محیط او ضلعې یې د دایرې وترونه وي محیطي زاویه بلل کېږي.

- د هرې محیطي زاویې پراخوالی د هغې د مخامخ قوس له نیمایي سره مساوي دی.
- هره محیطي زاویه د هغې د مرکزي زاویې نیمایي ده، چې د عین قوس په مخامخ کې پر ته ده.

هغه زاویه ده، چې یوه ضلعه یې په دایرې مماس او بله یې د دایرې وتر او راس د تماس په ټکي کې د دایرې پر محیط پروت وي مماسي زاویه بلل کېږي.

- هره مماسي زاویه د هغې مرکزي زاویې نیمایي ده، چې د عین قوس په مخامخ پرته وي.
- د دوو دایرو حالتونه یو بل ته:

_ که د دوو دایرو د مرکز ونو د واټن اوږدوالی د هغو د شعاعګانو له مجموعې څخه لوی وي دایرې غیر متقاطع بلل کېږي.

_ که د دوو دایرو د مرکزونو واټن اوږدوالی د هغو د شعاعګانو له مجموعې سره مساوي وي دایرې خارجاً(د یا له باندې خوا) مماس بلل کېږي.

_ که د دوو دایرو د مرکزونو اوږدوالی د هغو د شعاعګانو له اوږدوالی څخه کوچنی او د شعاع ګانو د تفریق حاصل یې د مطلقه قیمت څخه لوی وي متقاطع بلل کېږي.

_ که د دایرو د مرکزونو تر منځ واټن د هغې د شعاعګانو د تفریق حاصل مطلقه قیمت سره مساوي وي دایرې داخلاً(دننه) مماس دي.

_ که د دایرو د مرکزونو تر منځ واټن صفر وي دایرې متحد المرکز(د یوه مرکز لرونکي) بلل کېږي.

د لومړي څپرکی پوښتنې

• په لاندې پوښتنو کې د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب په نښه کړئ.

1− د يوې دايرې د قطر اوږدوالی مساوي دی په:

a) $3r$ b) π c) 2π d) $2r$

2− دايره په لاندې ډول ښودل کېږي:

a) 0 b) $(1,2)$ c) (b,a) d) $C(o,r)$

3- هغه مستقيمه کرښه چې له دايرې سره يوګډ ټکی ولري:

a) د وتر په نوم يادېږي. b) د قوس په نوم يادېږي.

c) د مماس په نوم يادېږي. d) د محيط په نوم يادېږي.

4- د هغو ټکو سټ چې فاصله يې د دايرې له شعاع څخه لويه وي:

a) د دايرې مخ بلل کېږي. b) د دايرې خارج بلل کېږي.

c) دايره بلل کېږي. d) د دايرې داخل بلل کېږي.

5- هغه وتر چې د دايرې مرکز ته نږدې وي:

a) پنډ وتر دی. b) ورو‌کی وتر دی.

c) هيڅ يو. d) لوی وتر دی.

6- که يوه مستقيمه کرښه دايره په دوو ټکو کې پرې کړي هغه ته:

a) مستقيمه کرښه او دايره وايي. b) قاطع وايي.

c) مماس وايي. d) موازي وايي.

7- که د يوې دايرې مرکزي زاويه 80° وي د مخامخ قوس اندازه يې مساوي په:

a) 90° b) $70'$ c) $80''$ d) 80°

8- يوه مستقيمه کرښه له يوې دايرې سره څو حالتونه لري:

a) 3 b) 7 c) 4 d) 1

9- هغه زاويه چې راس يې د ايرې پر محيط او ضلعې يې دوه وترونه وي:

a) مرکزي زاويه ده. b) مماسي زاويه ده.

c) محاطي زاويه ده. d) محيطي زاويه ده.

- تش ځایونه په مناسبو کلمو ډک کړئ:

1- د دایرې هغه برخه چې د وتر په واسطه د دایری له سطحې څخه بېله شوې وي د .... په نوم یادېږي.

2- د دایرې تر ټولو لوی وتر .... دی.

3- د هغو ټکو سټ چې .... یې له مرکز څخه د دایرې له شعاع څخه کوچنی وي د دایرې .... ویل کېږي.

4- که مستقیمه کرښه له یوې دایرې سره هیڅ ګډ .... ونلري هغه ته .... دایره ویل کېږي.

5- په هره دایره کې .... قطر پر وتر، وتر نیمایي او .... قوسونه د هغې څخه بیلوي.

6- په هر قایم الزاویه مثلث کې د وتر .... د .... ضلعو د مربعاتو له مجموعې سره مساوي دي.

7- په هره دایره کې هغه وتر چې مرکز ته نژدې وي تر ټولو .... وتر دی.

8- د دایرې شعاع د تماس په ټکی پر .... عمود وي.

9- مرکزي زاویه هغه زاویه ده چې .... یې د دایرې په مرکز او ضلعې یې د دایرې.................. وي.

10- هغه زاویه چې یوه ضلع یې .... په دایره او بله یې د دایرې .... او راس یې د .... په ټکی پروت وي د .... زاویې په نوم یادېږي.

- په لاندې جملو کې سمې او نا سمې جملې د(س) او (ن) د تورو په مرسته په نښه کړئ.

1- (   ) د یوې مستوي د ټولو ټکو سټ چې د(O) د یو ټاکلی ټکي څخه د(r) مساوي فاصلې ولري دایره بلل کېږي.

2- (   ) دایره د خپل محیط په نامه یادېږي.

3- (   ) هغه قطعه خط یا ټوټه کرښه چې د دایرې د محیط دوه ټکي سره نښلوي د دایرې د قطر په نامه یادېږي.

4- (   ) په یوه دایره کې شعاع یا وړانګه د قطر نیمایي ده.

5- (   ) د دایرې قطعه د($\frown$) په علامه ښودل کېږي.

6- (   ) د هغو ټکو سټ چې د شعاع په اندازه مساوي فاصله ولري د دايرې خارجي ساحه بلل کېږي.

7- (   ) په يوه دايره کې عمود قطر په وتر، وتر نيمايي او دوه بېلابېل قوسونه منځ ته راوړي.

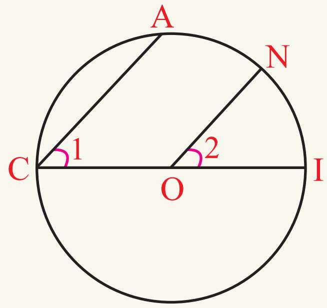
8- (   ) ټوله دايره د دايرې د قوس په نوم يادېږي.

9- (   ) د $d = \frac{r}{2}$ په رابطه کې d قطر او r د دايرې شعاع دی.

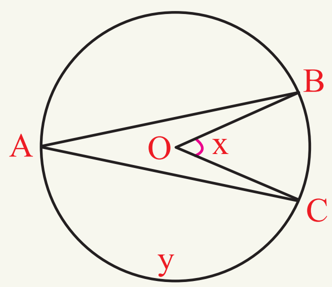
10- (   ) د يوې دايرې شعاع د تماس په ټکي پر مماس عمود وي.

• لاندې سوالونه په تفصيل سره حل کړئ.

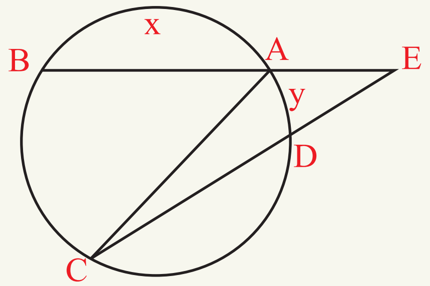
1- په لاندې شکل کې که $\overline{CI}$ د دايرې قطر او $\overline{ON} \parallel \overline{CA}$ وي ثبوت کړئ چې $\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{NI}$ دی.



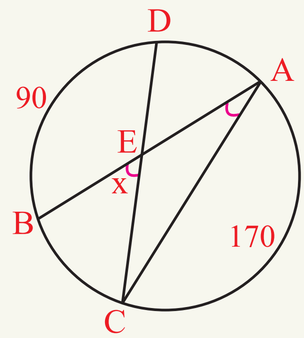
2- په لاندې $C(o,r)$ شکل کې که $y = 140^\circ$ او $\overset{\frown}{AB} = 48^\circ$ وي د $\hat{x}$ پيدا کړئ.

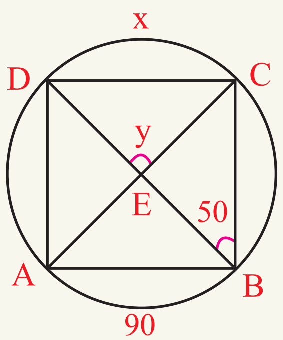


3- په لاندې شکل کې چې $\hat{E} = 40^\circ$ او د $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}$ او $\overset{\frown}{CD}$ مساوي اندازه اوږدوالی مساوي وي د $A\hat{C}D$ اندازه معلومه کړئ.

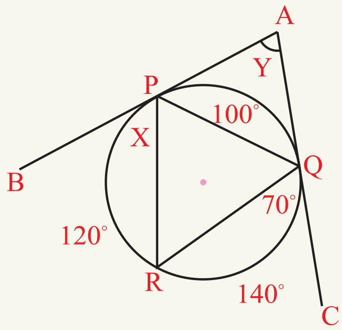


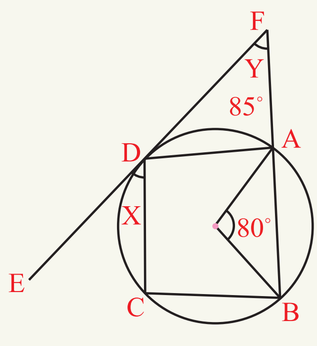
4- په لاندې شکلونو کې د x او y اندازه وټاکئ.





5- په لاندې شکلونو کې د x او y اندازې پیدا کړئ.

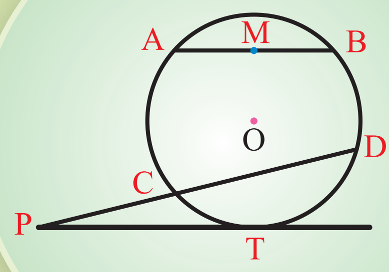




دویم څپرکی

په یوه دایره کې د اوږدوالی اړیکی

په دایره کې د اوږدوالي اړيکي



هغه ټوټه کرښې چې په مخامخ شکل کې وينئ نوم يې واخلئ.

تعريف

د اوږدوالی اړيکې: په يو هندسي شکل کې د کرښو د اجزاوو تر منځ اړيکی د اوږدوالی اړيکو په نوم يادېږي.

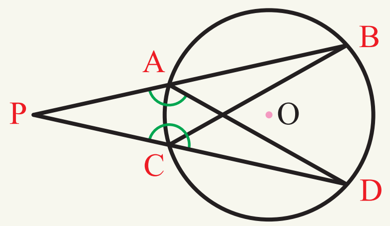
فعاليت

- د P له ټکي څخه چې د $C(O,r)$ دايرې په بهر کې پروت د $\overline{PAB}$ او $\overline{PCD}$ قاطع کرښې رسم کړئ.
- د A ټکی د D او B ټکي د C ټکي سره ونښلوئ.
- ويلای شئ چې د $\overset{\Delta}{PAD}$ او $\overset{\Delta}{PCB}$ مثلثونه مشابه دي؟
- په پورته دوو مثلثونو کې د تشابه نسبتونه وليکئ.

د دي فعاليت پايلې څخه لاندې قضيه څرگندېږي.

قضيه (**۱ - ۲**): کـه چيـرې د يوې دايـرې له بهرنيـو ټکو څخه پر دايره دوه قاطع کرښـې رسـم شـي، د يـوې قاطع د قطعاتـو د ضـرب حاصل، د بـل قاطـع د قطعاتو د ضـرب له حاصل سـره مسـاوي دی.

يعني: $\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\overline{PD}$



ثبوت: د $\overset{\Delta}{PAD}$ او $\overset{\Delta}{PCB}$ مثلثونو تر منځ لاندې اړیکې موجود دي دي.

$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$

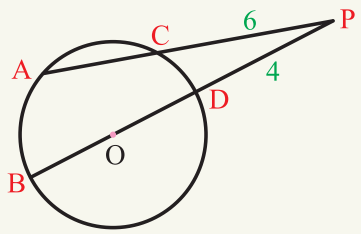
$\left.\begin{array}{l}\hat{D}=\hat{B} \text{ د عين قوس محيطي زاويې} \\ \hat{P}=\hat{P} \text{ ګډ}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}=\hat{C}$

د پورتنيو دريو زاويو د تساوي څخه پوهيږو چې د $\overset{\Delta}{PAD}$ او $\overset{\Delta}{PCB}$ مثلثونه مشابه دي، نو ليکلی شو چې:

$$\overset{\Delta}{PCB}\sim\overset{\Delta}{PAD}\Rightarrow\frac{PA}{PC}=\frac{PD}{PB}\Rightarrow PA\cdot PB=PC\cdot PD$$

مثال: په لاندې شکل کې $\overline{PA}$ او $\overline{PB}$ د $C(O,r)$ د دايرې دوه قاطع کرښې دي. که $\overline{PA}=10cm$, $\overline{PC}=6cm$ او $\overline{PD}=4cm$ اوږدوالی ولري، د $\overline{PB}$ او $\overline{DB}$ اوږدوالی پيدا کړئ.

حل: هغه قطعات(ټوټه کرښې) چې د P له ټکي څخه رسمېږي او د(۱-۲) قضيې په مرسته ليکلای شو، چې:



$\overline{PA}\cdot\overline{PC}=\overline{PB}\cdot\overline{PD}$

$10\cdot 6=\overline{PB}\cdot 4$

$60=4\overline{PB}$

$\overline{PB}=15cm$

$\overline{DB}=\overline{PB}-\overline{PD}$

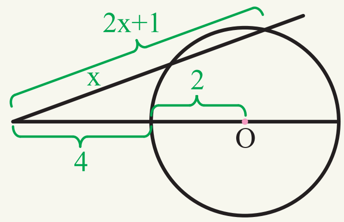
$\overline{DB}=15-4$

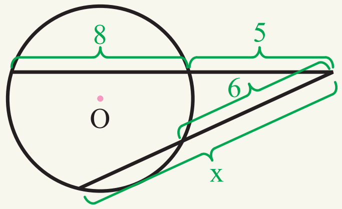
$\overline{DB}=11cm$

که چيرې د يوې دايرې له بهرنيو ټکو څخه پر دايره دوه قاطع کرښې رسم شي، د يوې قاطع د قطعاتو د ضرب حاصل، د بل قاطع د قطعاتو د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

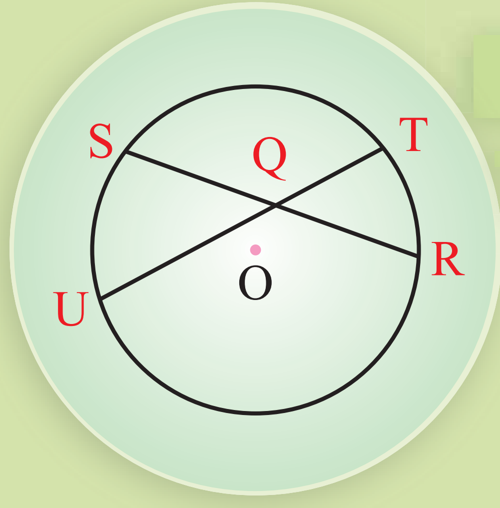
پوښتنې

1- په لاندې شکلونو کې د x عددي قيمت پيدا کړئ.



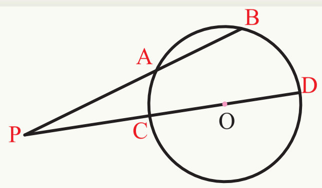


د یو ټکي طاقت نظر دایرې ته



مخامخ شکل ته پاملرنه وکړئ. ویلاشي شئ چي د $\overline{QR}\cdot\overline{QS}=\overline{QU}\cdot\overline{QT}$ مساوات سم دي.

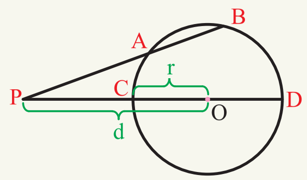
فعالیت



- د P له یو ټاکلي ټکي څخه چي C(O,r) د دایرې څخه بهر پروت دی پر هغه د $\overline{PAB}$ قاطع رسم کړئ.
- د P له بهرني ټکي څخه د PCD قاطع داسي رسم کړئ چي د $C(O,r)$ دایرې له مرکز څخه تیر شي.
- د $\overline{PAB}$ او PCD د ټوټه کرښو ترمنځ اړیکې د (2-1) قضیې له مخې ولیکئ.
- په پورتنۍ اړیکه کې د $\overline{PC}$ او $\overline{PD}$ اوږدوالی د دایرې له مرکز څخه ولیکئ.
- که د P ټکي واټن د دایرې له مرکز څخه په (d) او شعاع یا ورانګه په(r) سره وښیو، پورتنۍ اړیکه د d او r تر منځ ولیکئ.

د پاسني فعالیت د پایلې څخه لاندې قضیه څرګندېږي.

قضیه(2-2): که دیو ټاکلي ټکي څخه دوې قاطع کرښې په یوه دایره داسې رسم کړئ چي، دویمه قاطع د دایرې له مرکز څخه تېره شي. د لومړي قاطع د ټوټه کرښو تر منځ د ضرب حاصل د یو ټاکلي اندازې (d^2-r^2) سره مساوي دي، (d) د ټاکلي ټکي او د دایرې د مرکز تر منځ واټن او(r) د دایرې شعاع یا ورانګه ده.



لومړی حالت: که چیرې ټاکلي ټکی د دایرې په بهر کې پروت وي.

ثبوت: که چیرې د P ټکی د دایرې په بهر کې او واټن له مرکز څخه په(d) او دایرې شعاع په(r) سره وښیو، د (2-1) قضیې

له مخې لیکلای شو:
دوه نــور حالتونو چــې ټاکلی ټکي یــې د دایرې پر محیط او دننه په دایره کې پراته وي، دا دګرانو زده کوونکو کورنی دنده ده.

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}....(2-1)$$
$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=(\overline{PO}-\overline{CO})(\overline{PO}+\overline{OD})$$
$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=(d-r)(d+r)$$
$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=d^2-r^2$$

تعریف

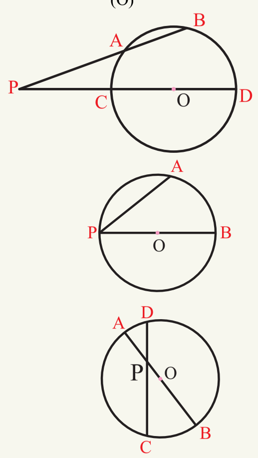
د $\overline{PA}\cdot\overline{PC}=d^2-r^2$ رابطه د P د ټکي طاقت نظر د $C(o,r)$ دایرې ته وایې چې، ثابته اندازه ده چې د $P_{(o)}=d^2-r^2$ په شکل ښودل کېږي.

لومړی مثال: که د یوې دایرې قطر $10cm$ او د P ټکی د $13cm$ په اندازه د دایرې له مرکز څخه واټن ولري د P ټکي طاقت نظر $C(o,r)$ دایرې ته پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې د دایرې قطر راکړل شوی دی لومړی د دایرې شعاع یا وړانګه وروسته د P ټکي طاقت نظر دایرې ته پیدا کړئ.

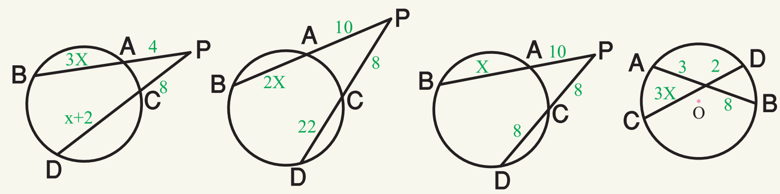
$$r=\frac{D}{2}=\frac{10}{2}=5cm$$
$$P_{(O)}=d^2-r^2$$
$$P_{(O)}=(13)^2-(5)^2$$
$$P_{(O)}=169-25\Rightarrow P_{(O)}=144$$

- که د یوه ټکي طاقت نظر یوې دایرې ته مثبت وي ټکی د دایرې نه بهر پروت دی، یا $P_{(o)}=d^2-r^2>0$ لکه د (2-2) قضیې شکل
- که د یوه ټکي طاقت نظر دایرې ته صفر وي ټکی د دایرې پر محیط پروت دی، یعنې $P_{(0)}=d^2-r^2=0\Rightarrow d^2=r^2$
- که د یوه ټکي طاقت نظر دایرې ته منفي وي ټکی د دایرې دننه پروت ده، یعنې $P_{(0)}=d^2-r^2<0\Rightarrow d^2<r^2$



پوښتنې

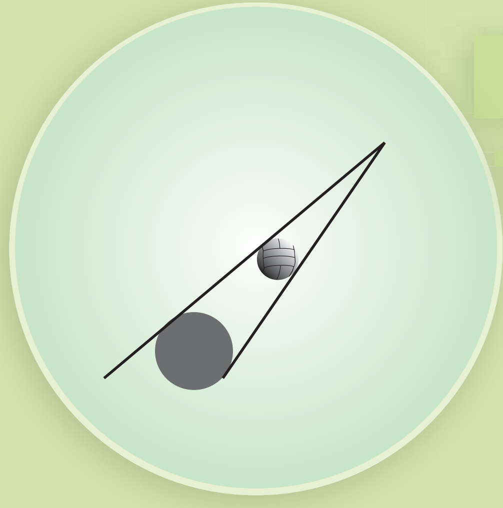
1- په لاندې شکلونو کې د x قیمتونه پیدا کړئ.



2- په لاندې حالتونو کې د یوه ټکي طاقت نظر یوې دایرې ته پیدا کړئ.

الف) که $d=7$ او $r=4$ وي. ب) که $d=3$ او $r=3$ وي. ج) که $d=3$ او $r=5$ وي.

په دايرې مماس کرښه



شکل ته پاملرنه وکړئ.
که چیرې د نور د وړانګې حرکت مسیر مستقیمې کرښې ومنل شي، دغه کرښې نظر توپ او د هغه له سیورې سره څه اړیکې لري.

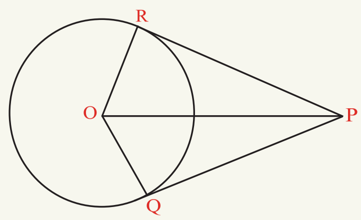
فعالیت

- د P له یوه بهرنۍ ټکې نه د $C(O,r)$ په دایره د $\overline{PR}$ او $\overline{PQ}$ دوه مماسونه رسم کړئ.
- که د Q او R ټکې پر دایره د تماس ټکې وي. ایا د P له ټکې پر دایره بل مماس رسمېدلای شي؟
- د O ټکې د Q، R او P ټکو سره و نښلوئ.
- لاسته راغلې مثلثونه سره څه اړیکې لري؟
- ایا رسم شوي مماسونه سره برابر دي؟

د دې فعالیت د پایلې څخه لاندې قضیه څرګندېږي.

قضیه(2-3): د یوې دایرې له بهرنۍ ټکې څخه پر دایره دوه مساوي مماسونه، رسمېږي.

ثبوت: په $\overset{\Delta}{POR}$ او $\overset{\Delta}{POQ}$ مثلثونو کې لیکلی شو چې:



$\overline{OR} = \overline{OQ}$.... د دایرې شعاع یا وړانګه

$\overline{PO} = \overline{PO}$ .... ګډ

$\hat{R} = \hat{Q}$..............90°

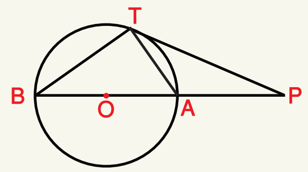
$\overset{\Delta}{POR} \cong \overset{\Delta}{POQ}$

$\overline{PR} = \overline{PQ}$

قضیه(2-4): که د یوې دایرې له بهرنۍ ټکې نه یو مماس او یو قاطع پر یوه دایره رسم شي ثبوت کړئ، چې د یوه ټکې طاقت نظر دایرې ته د مماس له مربع سره مساوي دی.

ثبوت: په $C(O,r)$ دایره کې $\overline{PT}$ مماس او $\overline{PAB}$ قاطع دی، که د T ټکې له A او B

ټکوسره ونښلوو، د $\overset{\Delta}{PTA}$ او $\overset{\Delta}{PTB}$ مثلثونو څخه ليکلای شو چې:



$$\hat{PTA} = \hat{PBT} .....(I) \quad \text{محيطي زاويې او د عين قوس ګډ مماس}$$

$$\hat{P} = \hat{P} ....(II)$$

$$\overset{I \wedge II}{\Rightarrow} \hat{PTB} = \hat{PAT}$$

$$\Rightarrow \overset{\Delta}{PTB} \sim \overset{\Delta}{PTA}$$

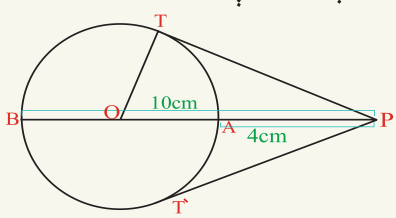
$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PT}} = \frac{\overline{PT}}{\overline{PB}}$$

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PT}^2 \Rightarrow \overline{PT}^2 = d^2 - r^2$$

په پايله کې ليکلای شو چې: $PT = PT'$

مثال: په لاندې شکل کې د $\overline{PT}$ او $\overline{PT'}$ اوږدوالی لاسته راوړئ.

حل:



$PA = 4cm$

$PB = 10cm$

$PT = ?$

$$PT^2 = PA \cdot PB$$

$$PT^2 = 4 \times 10 = 40$$

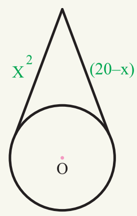
$$PT = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

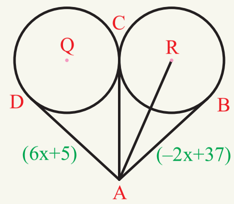
- د يوې دايرې له باندنې ټکي څخه پر هغې دوه مساوي مماسونه رسمولای شو.

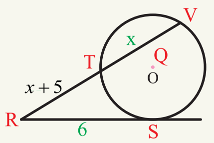
که چېرې د يوې دايرې له بهرنې ټکي څخه پر دايره يو قاطع او يو مماس رسم شي، د يوه ټکي طاقت نظر دايرې ته د مماس له مربع سره مساوي دی.

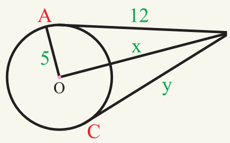
پوښتنې

په لاندې شکلونو کې د x قيمت لاسته راوړئ.

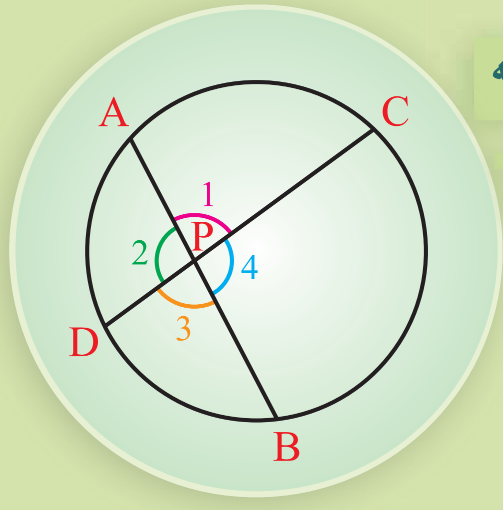








د يوې دايرې دننۍ(داخلي) زاويه



د يوې دايرې په دننه کې دوه متقاطع وترونه رسم کړئ او وواياست چې څو زاويې جوړوي، او څه يې نوموئ.

تعريف

هغه زاويې چې د دايرې په دننه کې د دوو وترونو د تقاطع په مرسته منځ ته راځي د دايرې دننۍ زاويې بلل کېږي، لکه په پورتنۍ شکل کې د $\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4}$ زاويې.

فعاليت

- د $C(O,r)$ دايره رسم کړئ، په هغه کې د $\overline{AB}$ او $\overline{CD}$ دوه وترونه د اسې رسم کړئ چې د P په ټکي کې يو بل پرې کړي هغه زاويې چې منځ ته راغلې د څه په نامه يادېږي؟
- د D او C ټکي د B سره ونښلوئ د $\hat{CPB}$ زاويه چې د $\overset{\Delta}{PBD}$ باندنۍ زاويه ده، د مثلث د دوو ناګاونډيو زاويو سره څه اړيکه لري.

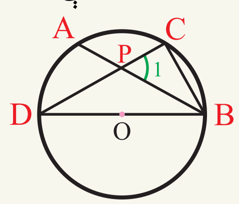
په ياد ولرئ:

- هره محيطي زاويه د مخامخ قوس نيمايي ده.
- په يوه مثلث کې د هرې خارجي زاويې پراخوالی د دوو ناګاونډيو زاويو د مجموعې سره برابر دی.

د دې فعاليت د پايلې څخه لاندې قضيه بيان او ثبوتوو.

قضيه(2-5): د يوې دايرې د هرې دننۍ(داخلي) زاويې پراخوالی، د هغو قوسونو د مجموعې له نيمايي سره مساوي دی، چې د د زاويو د اضلاعو د پرېکړې په مرسته منځ ته راغلي وي.

ثبوت: څرنګه چې د $\hat{B}$ او $\hat{D}$ د دايرې محيطي زاويې دي نو کولای شو چې وليکو:

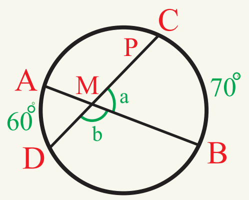


$$\left.\begin{array}{ll}\hat{B}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AD} & \text{د محيطي زاويې وسعت}\\ \hat{D}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} & \text{د محيطي زاويې وسعت}\\ C\hat{P}B=\hat{B}+\hat{D} & \text{د هر مثلث خارجي زاويه}\end{array}\right\}\Rightarrow C\hat{P}B=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$$

$$C\hat{P}B=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC})$$

لومړی مثال: په لاندې شکل کې د $\hat{a}$ او $\hat{b}$ زاويې پيدا کړئ.

حل: څرنګه چې د يوې دايرې دننې زاويې پراخوالی د هغو قوسونو دمجموعې له نيمايي سره مساوي دی چې د زاويو په مخامخ کې پراته وي، يعنې:



$$C\hat{M}B = \hat{a} = \frac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{60+70}{2} = 65^\circ$$

$$\hat{b} = 180^\circ - a = 180^\circ - 65^\circ = 105^\circ$$

دويم مثال: په لاندې شکل کې د x او $N\hat{T}M$ زاويې پراخوالی وټاکئ.

حل: د يوې دايرې دننې زاويو د اړيکو له مخې ليکلی شو چې:

$$\overset{\frown}{NM} = 9x+17 \quad , \quad \overset{\frown}{PQ} = 10x-10$$

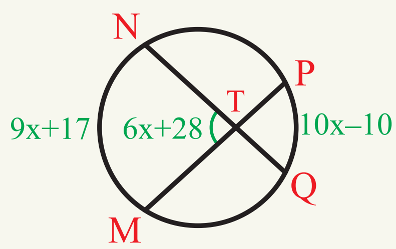
$$N\hat{T}M = 6x+28$$

$$6x+28 = \frac{9x+17+10x-10}{2}$$

$$12x+56 = 19x+7$$

$$-7x = -49$$

$$x = 7$$

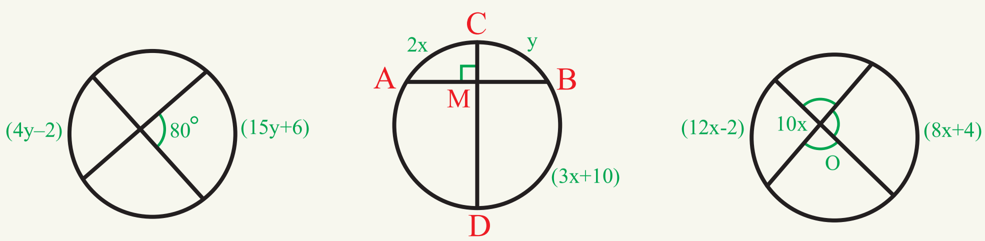


$$N\hat{T}M = 6x+28$$

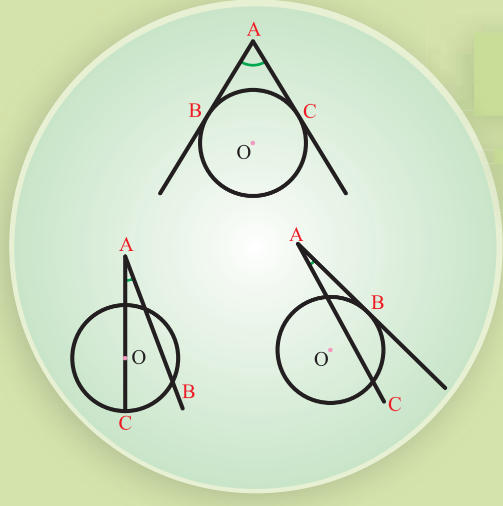
$$= 6\times7+28 = 42+28 \Rightarrow N\hat{T}M = 70^\circ$$

پوښتنې

1- په لاندې شکلونو کې د x او y اندازې معلوم کړئ.



د دایرې باندنۍ زاویه



په مخامخ شکلونو کې د توپه کرښو او د زاویو نومونه واخلئ.

تعریف

هغه زاویه چې د دوو قاطع کرښو، دوو مماسونو یا د یو قاطع او یوه مماس د پرېکړې څخه د دایرې په بهر کې منځ ته راغلې وي د دایرې باندنۍ زاویه بلل کېږي.

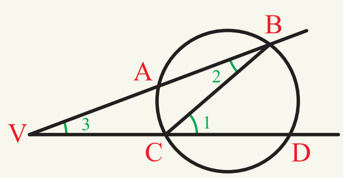
فعالیت

- د $C(O,r)$ په دایره کې د $\overline{AB}$ او $\overline{CD}$ دوه غیر موازي وترونه غزوو تر څو د $B\hat{V}D$ خارجي زاویه منځ ته راشي د C ټکی له B سره ونښلوئ.
- د $B\overset{\Delta}{V}C$ مثلث باندنۍ زاویه یعنې $(\hat{1})$ د مثلث د دوو ناګاونډیو زاویو سره څه اړیکې لري؟

د دې فعالیت له پایلې څخه لاندې قضیه بیانېږي.

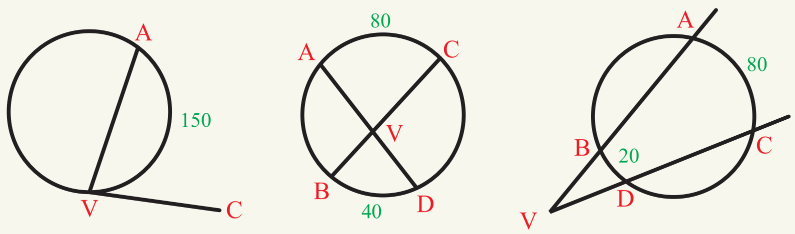
قضیه (6-2): د یوې دایرې د باندنۍ زاویې پراخوالی، د هغو قوسونو د توپیر له نمایي سره مساوي دی، چې د وترونو د تقاطع څخه منځ ته راغلي وي.

ثبوت: د B ټکی له C سره نښلوو او $V\overset{\Delta}{B}C$ مثلث کې لرو چې:



$$\left.\begin{array}{ll} \hat{1}=\hat{2}+\hat{3} & \text{د مثلث خارجي زاویې پراخوالی} \\ \hat{3}=\hat{1}-\hat{2} & \\ \hat{1}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AD} & \text{د محیطي زاویې پراخوالی} \\ \hat{2}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC} & \text{د محیطي زاویې پراخوالی} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{3}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}-\frac{1}{2}AC \quad B\hat{V}D=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD}-\overset{\frown}{AC})$$

لومړی مثال: په لاندې شکلونو کې د $A\hat{V}C$ زاویو پراخوالی پیدا کړئ.



حل: په دایره کې دننیو، باندنیو او مماسي زاویو پراخوالی خخه په ګټه اخستلو سره لیکلای شو چې:

a) $A\hat{V}C = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AV} = \frac{1}{2}\cdot(150)^\circ$, $A\hat{V}C = 75^\circ$

b) $A\hat{V}C = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}) = \frac{1}{2}\cdot(80+40)^\circ$, $A\hat{V}C = 60^\circ$

c) $A\hat{V}C = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}) = \frac{1}{2}\cdot(80-20)^\circ$, $A\hat{V}C = 30^\circ$

دویمه مثال: د لاندې شکل خخه په ګټه اخستو سره د x او y ارزښتونه پیدا کړئ.

$A\hat{N}B = \frac{x+y}{2} \Rightarrow 70 = \frac{x+y}{2} \Rightarrow x+y = 140......I$

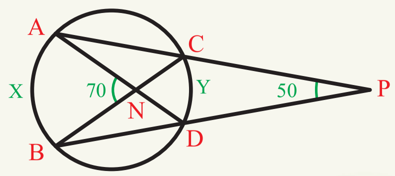
$A\hat{P}B = \frac{x-y}{2} \Rightarrow 50 = \frac{x-y}{2} \Rightarrow x-y = 100......II$

که چیرې د I او II اړیکې خوا په خوا جمع کړو لرو چې:

$2x = 240$

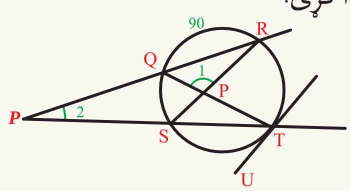
$x = 120^\circ$

$y = 20^\circ$



پوښتنې

په لاندې شکلونو کې نا معلوم کمیتونه پیدا کړئ.

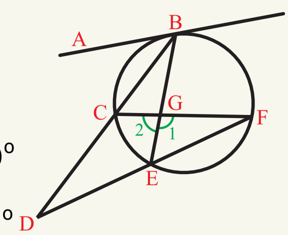


$\overset{\frown}{QR} = 90^\circ$

$\overset{\frown}{RT} = 150^\circ$

$\overset{\frown}{QS} = 50^\circ$

$S\hat{T}U = ?$, $\hat{1} = ?$, $\hat{2} = ?$



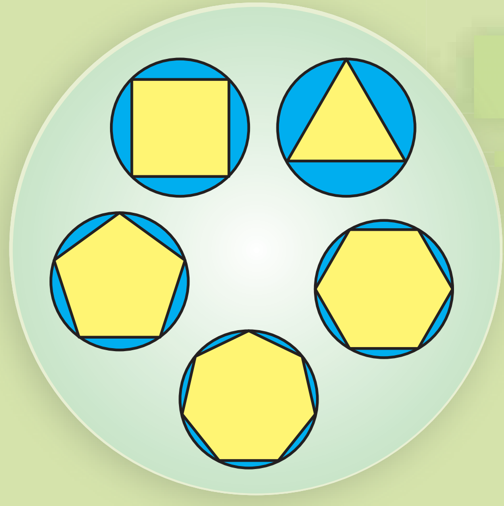
$\overset{\frown}{BC} = 70^\circ$

$\overset{\frown}{BF} = 100^\circ$

$\overset{\frown}{EF} = 130^\circ$

$\hat{1} = ?$, $\hat{2} = ?$, $\hat{D} = ?$, $A\hat{B}C = ?$

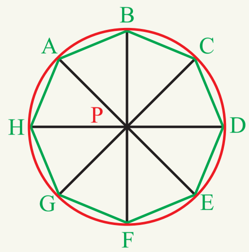
محیطي دایره



مخامخ شکل ته پاملرنه وکړئ، کوم هندسي شکلونه وینئ نومونه یې واخلئ.

تعریف

هغه دایره چې د مضلع د راسونو څخه تېره شوې وي محیطي دایره بلل کېږي او مضلع مرسوم په دایره بلل کېږي، لکه په مخامخ شکل:



د مثلث محیطي دایره: هغه دایره چې د مثلث د درې راسونو څخه تېره شوې وي د مثلث د محیطي دایرې په نامه یادیږي.

فعالیت

- د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث رسم کړئ.
- د $\overline{AC}$ او $\overline{BC}$ د اضلاعګانو عمودي ناصفونه رسم کړئ.
- پورتنی عمودي ناصفونه په څو ټکو کې پرې کوي؟ د هغې د تقاطع ټکی په O سره وښیئ.
- د $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ او $\overline{OC}$ اوږدوالی سره پرتله کړئ.
- که چیرې یوه دایره د O په مرکز او د $\overline{OA}$ په شعاع رسم شي ایا د B او C له ټکو تیریږي او که نه ؟
- ایا دا دایره د B او C له ټکو څخه هم تیریږي؟ ولې؟
- رسم شوې دایره د مثلث د څه په نامه یادیږي؟

په یاد ولرئ چې:
هغه دایره چې د مضلع د راسونو څخه تیریږي، مضلع ته مرسوم په دایره وایي.

ددې فعالیت د پایلې څخه په لاندې ډول لکلای شو:

پایله: د اضلاعګانو د وسطي عمودونو د پرېکړې ټکی د مثلث د محیطي زاویې مرکز دی.

مثال: د $\overset{\Delta}{ABC}$ قایم الزاویه مثلث داسې رسم کړئ چې د قایمو څنډو اوږدوالی په ترتیب سره $8cm$ او $6cm$ وي، د دې مثلث د محیطي دایرې شعاع(وړانګه) لاس ته راوړئ.

حل: پوهېږو چې په هر قایم الزاویه مثلث کې د هغې د محیطي دایرې مرکز پر وتر باندې پروت وي نو لومړی د قایم الزاویه مثلث د وتر اوږدوالی پیدا کوو چې د نیمایي ټکی یې د محیطي دایرې مرکز دی.

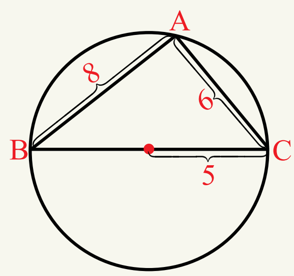
$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

$$\overline{BC}^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

$$\overline{BC}^2 = \sqrt{100}$$

$$\overline{BC} = 10cm$$

$$r = \frac{BC}{2} \Rightarrow r = \frac{10}{2} = 5cm$$



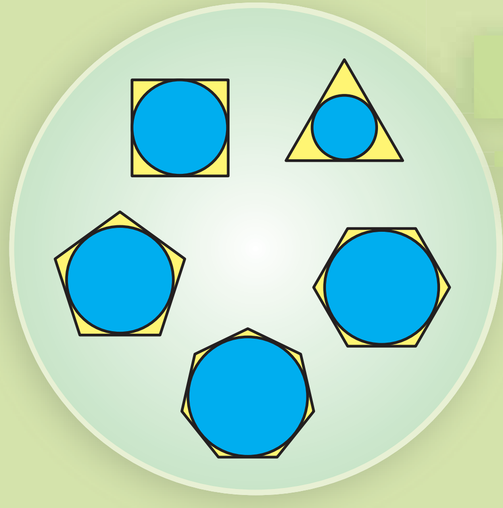
• هغه دایره چې د مضلع د راسونو څخه تېرېږي د مضلع محیطي دایرې په نامه یادېږي او مضلع ته مرسوم په دایره وایي.
• د یو مثلث داضلاعو د منځنی(وسطي) عمودونو د پریکړې ټکی د مثلث د محیطي دایرې مرکز دي.

پوښتنې

1- یو مثلث چې د اضلاعو اوږدوالی یې په ترتیب سره $3cm$, $4cm$ او $5cm$ وي رسم کړئ د هغې د محیطي دایرې شعاع یا وړانګه حساب کړئ.

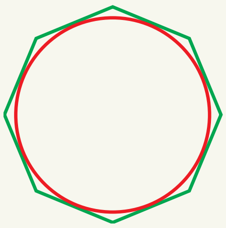
2 - د قایم الزاویه مثلث، متساوي الاضلاع او متساوي الساقین مثلثونو د محیطي دایرو مرکزونه په کومو ځایونو کې پراته دي په شکل کې یې وښیئ.

محاطي دايره



- هغه هندسي شکلونه چې په مخامخ شکل کې يې وينئ نومونه واخلئ.
- د شکلونو تر منځ څه اړيکې وينئ.

تعريف



هغه دايره چې د محيطي مضلع پر ضلعو مماس وي، د مضلع د محاطي دايرې په نامه يادېږي لکه مخامخ شکل چې د مضلع پواسطه احاطه شوې دی.

د مثلث محاطي دايره: هغه دايره چې د يو مثلث په درې ضلعو مماس وي د مثلث محاطي دايره بلل کېږي.

فعاليت

- د $\overset{\Delta}{ABC}$ يو کيفي مثلث رسم کړئ.
- د $\hat{A}, \hat{B}$ او $\hat{C}$ زاويو ناصفونه رسم او د پريکړې ټکی په (O) سره ونښيئ.
- د (O) له ټکي څخه د مثلث پر اضلاعو د $\overline{OM}, \overline{ON}$ او $\overline{OP}$ عمود کرښې رسم کړئ.
- د $\overline{OM}, \overline{ON}$ او $\overline{OP}$ عمودونو اوږدوالي پرتله کړئ.
- ايا هغه دايره چې د (O) په مرکز او د $\overline{ON}$ په شعاع رسم شي د M او P له ټکو څخه تيرېږي؟ ولې؟
- رسم شوې دايره د څه په نامه يادېږي؟

مرسته: د يوه مثلث وسطي عمودونه د مثلث دننه په يوه ټکي کې پريکوي

د پورتني فعاليت پايله کولای شو چې په لاندې توګه څرګنده کړو.
د هر مثلث دننۍ ناصف الزاويو ترمنځ د پرېکړې ټکی، د مثلث د محاطي دايرې له مرکز څخه عبارت دی.

د مثلث باندنۍ محاطي دايره

فعاليت

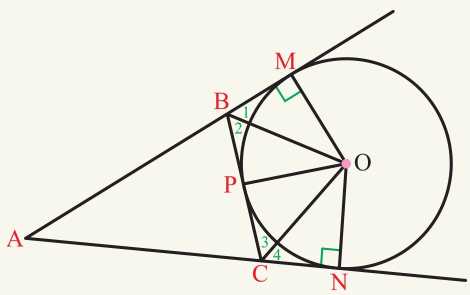
د مثلث باندنۍ دايره رسم کړئ.

- د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث رسم کړئ او $\overline{AB}$ او $\overline{AC}$ ضلعو ته امتداد ورکړئ.
- د مثلث د $\hat{B}$ او $\hat{C}$ زاويو باندنۍ ناصف الزاويې رسم او د پرېکړې ټکی په (O) سره وښيئ.
- ايا د (O) ټکی د مثلث د باندنۍ محاطي دايرې مرکز کېدلی شي؟ ولې؟
- د (O) له ثابت ټکي څخه د $\overline{OP}$, $\overline{OM}$ او $\overline{ON}$ عمودي کرښې د مثلث په يوه ضلعه او د هغه په امتداد رسم او وښيئ چې د O دايرې شعاع ګاني دي.

فکر او خبرنه وکړئ:
• کـه چيـرې د يـوې څلور ضلعي د مخامخ زاويـو مجموعـه 180° وي څلور ضلعي په دايره مرسوم دي.

په ياد ولرئ:
• هـر منظمه مضلع محيطي او محاطي دايره لري.

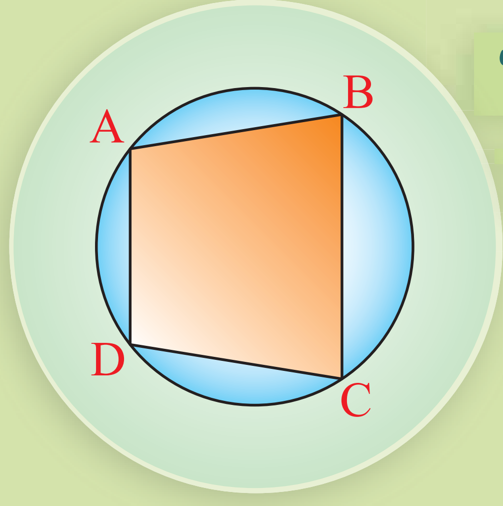
د پورتني فعاليت پايله کولای شو په لاندې توګه څرګنده کړو.
هغه دايره چې د يو مثلث په يوه ضلع او د دوو ضلعو پر امتداد مماس وي د هغه مثلث باندنۍ محاطي دايره بلل کېږي.



پوښتنې

1- په کومو مثلثونو کې د محيطي دايرې او محاطي دايرې مرکزونه منطبق دي، رسم او په شکل کې يې وښيئ.

په دايره کې د مرسوم څلورضلعي ځانګړتياوې (خواص)



په مخامخ شکل کې دايره د څلور ضلعي له راسونو سره څه اړيکه لري.

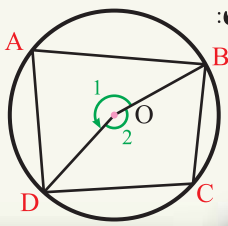
فعاليت

- د $ABCD$ يو کيفي څلور ضلعي مرسوم په دايره رسم کړئ.
- د محيطي دايرې منځ ته راغلی زاويې څه نوميږي؟
- د دايرې مرکز د څلور ضلعي د دوو مخامخ راسونو سره ونښلوئ، د منځ ته راغلی مرکزي زاويې مجموعه څو درجې دی؟
- د مرکزي او محيطي زاويو اړيکې چې د عين قوس مخامخ پرتې وي د پورته مرکزي زاويو لپاره وليکئ.

د دې فعاليت د پايلې څخه لاندې قضيه بيانولای شی:

قضيه: په يوه دايره کې د مرسوم څلور ضلعي د مخامخ زاويو مجموعه $180°$ ده.

ثبوت:



$$\hat{O}_1+\hat{O}_2=360^\circ$$

$$D\hat{C}B=\frac{1}{2}\hat{O}_1$$

$$D\hat{A}B=\frac{1}{2}\hat{O}_2$$

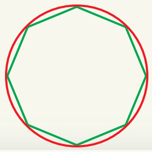
$$D\hat{C}B+D\hat{A}B=\frac{1}{2}(\hat{O}_1+\hat{O}_2)=\frac{360^\circ}{2}=180^\circ$$

فعاليت

- منظم درې ضلعي د څه په نامه يادېږي، د هرې زاويې پراخوالي څو درجې ده؟
- منظم څلور ضلعي څرنګه ونوموو؟
- د هغې د هرې زاويې پراخوالی څو درجې دی؟

تعریف

هغه مضلع چې اضلاع او زاويې يې يو له بل سره مساوي وي منظمه مضلع بلل کېږي.



فعالیت

- په خپله خوښه يوه پنځه ضلعي رسم کړئ.
- يو راس يې د هغې له ناګاونډه راس سره ونښلوئ، څو مثلثونه منځ ته راځي؟
- د دې مثلثونو دننيو زاويو مجموعه څو درجې ده؟
- د پنځه ضلعي دننی زاويو مجموعې په هکله څه فکر کوئ؟
- دغه فعاليت د يو شپږ ضلعي په هکله تکرار کړئ.
- که چيرې n ضلعي مضلع ولرو د هغې دننی زاويو مجموعه به يې څو درجې وي؟

که چيرې د يوې مضلع د ضلعو شمېر په n او د هغې دننيو زاويو مجموعه په S_n وښيو نو د هر n ضلعي دننيو زاويو مجموعه $S_n = (n-2)180^\circ$ درجې ده.

مثال: د يو څلور ضلعي او لس ضلعي دننيو زاويو مجموعه پيدا کړئ.

حل: د هر مضلع دننيو زاويو مجموعه د $S_n = (n-2)180^\circ$ اړيکی له مخې تاکل کېږي.

$$S_n = (n-2)(180^\circ)$$

$$S_4 = (4-2)(180^\circ) \Rightarrow S_4 = 360^\circ$$

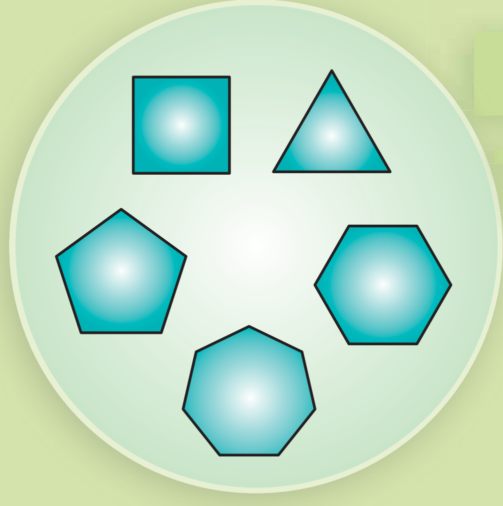
$$S_{10} = (10-2)(180^\circ) \Rightarrow 8\times180 \Rightarrow S_{10} = 1440^\circ$$

په یاد ولرئ چې:

- د قطرونو تعداد د n ضلعي له يو راس څخه د 3-n اړيکی په مرسته لاس ته راځي.
- له يو راس څخه د مضلع په منځ کې د مثلثونو شمېر د 2-n اړيکي په مرسته لاسته راځي.
- په يوه دايره کې د مرسوم څلور ضلعي د مخامخ زاويو مجموعه 180° دي.
- هغه مضلع چې د ضلعو اوږدوالی يې سره مساوي وي منظم مضلع بلل کېږي.

پوښتنې

1- د يوې منظمې شپږ ضلعي مضلع د زاويو پراخوالی څو درجې دي؟
2- د يوې منظمې n ضلعي مضلع د زاويو اندازه څو درجې دي؟
3- په يوه لس ضلعي مضلع کې د قطرونو په مرسته د يوه راس څخه څو مثلثونه منځ ته راځي؟

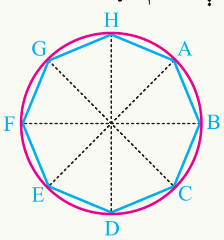


د منظمې مضلع ترسیم

- پاملرنه وکړئ.
- پــه شــکل کې خــه ډول مضلــع گانې گورئ.
- ستاســې په نظر دغه مضلع گانې په څه ډول رسم شوي دي؟

فعالیت

- د $C(O,r)$ دایره رسم کړئ د هغې په مرکز کې (8) مساوي مرکزي زاویې رسم کړئ.
- که چیرې n د مضلع د اضلاعو شمېر او θ د مخامخ ضلعې مرکزي زاویه وي ایا د $\hat{\theta} = \frac{360^\circ}{n}$ اړیکه سمه ده؟
- یو 8 ضلعي مضلع د $C(O,r)$ په دایره کې رسم کړئ.
- د دایرې محیط سره د مرکزي زاویو د ضلعو د پریکړې ټکي ونښلوئ.
- ایا د منځ ته راغلي مضلع ضلعې سره مساوي دي؟ ولې؟
- منځ ته راغلي مضلع څه ډول ده؟ د مضلع د هرې ضلعې د مخامخ مرکزي زاویې پراخوالی څو درجې ده؟



د یو منظم n ضلعي مضلع د هر ضلع مخامخ د مرکزي زاویې پراخلوالی مساوي په $\hat{\theta} = \frac{360^\circ}{n}$ دی.

فعالیت

- د $C(O,r)$ په دایره کې یوه منظمه شپږ ضلعي رابنده ده.
- د دایرې مرکز د مضلع له شپږو راسونو سره نښلوو. څو مثلثونه منځ ته راځي؟
- د شپږ ضلعي د مخامخ ضلعو د مرکزي زاویو پراخوالی څو درجې دی؟
- منځ ته راغلي مثلثونه څه ډول مثلثونه دي؟

د پورتني فعالیت پایله کولی شو په لاندې توگه څرگنده کړو.

د يوې شپږ ضلعي د هرې ضلعې اوږدوالی د هغې د محیطي دايرې له شعاع سره مساوي دی.

مثال: هغه دايره چې شعاع يې $2cm$ دی، ځرنگه کولی شو چې هغه په يوه منظم شپږ ضلعي مضلع محاط کړو؟

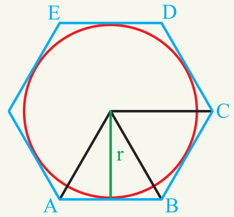
حل: پوهېږو چې د هرې منظمې شپږ ضلعي مضلع هره ضلع د هغې د محيطي دايرې له شعاع سره مساوي ده نو د پرکار خوله د $2cm$ په اندازه خلاصوو او په پرله پسې توگه د دايرې له محيط څخه مساوي قوسونه جلاکوو د ټاکل شويو ټکو د نښلولو څخه منظم شپږ ضلعي منځ ته راځي؟

د محاطي دايرې د شعاع له مخې د منظمې مضلع مساحت

فعاليت

- د $C(O,r)$ محاطي دايره او د $ABCDEF$ منظمه مضلع رسم کړئ.
- د O ټکی د B,A او C راسونو سره ونښلوئ. د $\overset{\Delta}{OAB}$ او $\overset{\Delta}{OBC}$ مثلثونه چې منځ ته راغلي دي انطباق منونکي دي؟ ولې؟
- د $\overset{\Delta}{AOB}$ په مثلث کې د $\overline{AB}$ د ضلعې جگوالی(ارتفاع) د محاطي دايرې له شعاع سره مساوي دي. ولې؟
- د پورتنی مثلثونو مساحت له کومې رابطې څخه په لاس راځي؟
- ايا د منظمې n ضلعي مضلع مساحت د n انطباق منونکو مثلثونو څخه جوړ دی؟
- د منظمې مضلع محيط د $P = AB \cdot n$ اړيکی يا رابطې څخه لاسته ته راځي. ولې؟

که چيرې د منظمې مضلع مساحت په A، محيط يې په P او د يوې منظمې n ضلعي مضلع د محاطي دايرې شعاع په r سره وښيو نو د مضلع مساحت عبارت دی له: $A = \frac{1}{2}P \cdot r$ چې په لاندې ډول ثبوتېږي:



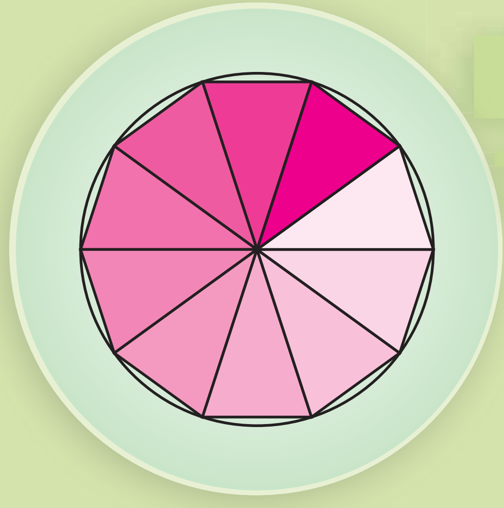
$$A = \frac{1}{2}AB \cdot r \cdot n$$

$$P = AB \cdot n \text{ د مضلع محيط } \Rightarrow A = \frac{1}{2}P \cdot r$$

پوښتنې

1- په يوه دايره کې چې شعاع يې $3cm$ وي يو متساوي الاضلاع مثلث داسې رسم کړئ، چې محاط په دايرې وي؟

د دايرې محيط او مساحت



په راکړل شوي شکل کې د مثلثونو مجموعي مساحت د دايرې او د مثلثونو د يو شمېر ضلعو د مجموع اوږدوالى د دايرې محيط سره پرتله کړئ.

د $C(O,r)$ په دايره کې چې قطر په (d) او محيط يې د (C) په توروو ښودل شي د دايرې د دې دوو غړو تر منځ لاندې اړيکه وجود لري؟

$$\frac{\text{د دايرې محيط}}{\text{د دايرې قاعده}} = \frac{c}{d} = \text{constant}$$

$$\frac{c}{d} = \pi \Rightarrow c = \pi d \; .... \; (I) \quad [\pi \approx 3.14159\cdots]$$

پوهېږو چې $r = \frac{d}{2}$ يا $d = 2r$ که چېرې په (I) اړيکه کې د (d) پر ځای د (2r) قيمت وليکو، د دايرې محيط د لاندې اړيکې څخه لاسته راځي:

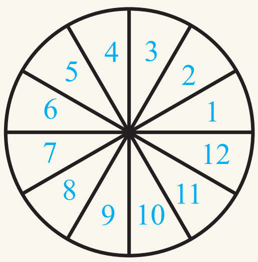
$$C = \pi d$$

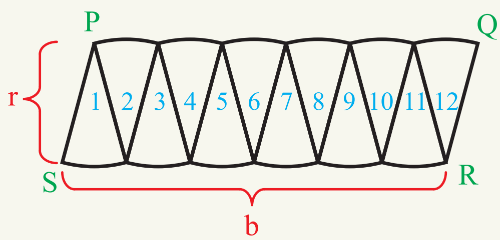
$$C = 2\pi r$$

د دايرې د مساحت د ثبوت او محاسبې لپاره پرمختللې رياضي ته اړتيا ده، نو په دې ډول د دايرې د مساحت محاسبې لپاره په لاندې توګه عمل کوو:

يوه دايره د هغې د قطرونو په مرسته په (12) مساوي برخو وېشو او هره برخه يې د 1 څخه تر 12 پورې شمېرو سره وښيو که چېرې د دايرې دغه مثلثي ټوټې غوڅ او بيا هغوی څنګ په څنګ د لاندې شکل په څېر ترتيب کړو.

په روښانه ډول ليدل کېږي، چې متوازي الاضلاع ته ورته شکل منځ ته راځي.





پوهېږو چې د b قاعده د دايرې د محيط نيمايي ده. ولې؟ نو:

جګوالی × قاعده = د متوازي الاضلاع مساحت

$= \frac{1}{2}Cr$ د متوازي الاضلاع مساحت

له بلې خوا پوهېږو چې($C = 2\pi r$ = د دايرې محيط)دی، نو لرو چې:

$= A = \frac{1}{2}\cdot 2\pi r\cdot r = \pi r^2$ د متوازي الاضلاع مساحت

پوهېږو چې د متوازي الاضلاع مساحت او دايرې سره ډېر نږدې دي، نو ليکلای شو: $A = \pi r^2$

په پايله کې ويلی شو چې د دايرې مساحت د $A = \pi r^2$ اړيکی او محيط يې د $C = 2\pi r$ اړيکی په مرسته په لاس راځي.

لومړی مثال: د يوې دايرې ورانګه(شعاع) $14cm$ ده د دايرې مساحت پيدا کړئ.

حل: د دايرې د مساحت د اړيکې څخه په ګټو اخستو سره يعنې $A = \pi r^2$ لرو چې:

$A = \pi r^2$

$A = (3.14159)$

$A = (3.14159)\cdot 196cm^2 \Rightarrow A = 615.75\ cm^2$

دويمه مثال: که چيرې د دايرې قطر $70cm$ وي د دايرې شعاع او مساحت پيدا کړئ.

حل: څرنګه چې د دايرې محيط راکړل شوي دی، نو اول شعاع، وروسته مساحت پيدا کوو.

$r = \frac{d}{2} \Rightarrow r = \frac{70}{2} = 35$

$A = \pi r^2 \Rightarrow A = 3.14159(35)^2 \Rightarrow A = 3848.4\,cm^2$

دريمه مثال: که چيرې د دايرې محيط $14\pi cm$ وي د دايرې شعاع او مساحت پيدا کړئ.

حل: څرنګه چې د دايرې محيط راکړل شوي دی، نو د مساحت پيدا کولو لپاره اول شعاع پيدا کوو.

$C = 14\pi cm$

$2\pi r = 14\pi \Rightarrow 2r = 14 \Rightarrow r = \frac{14}{2} = 7$

$A = \pi r^2 \Rightarrow (3.14159)\cdot 7\cdot 7 \Rightarrow A = 153.93\ cm^2$

- د يوې دايرې مساحت د r په شعاع د $A = \pi r^2$ له اړيکې څخه لاس ته راوړو.
- د يوې دايرې محيط د r په شعاع د $C = 2\pi r$ له اړيکې څخه لاس ته راوړو.

پوښتنې

1- که چيرې دايرې محيط $41cm$ وي د دايرې شعاع يې لاس ته راوړئ.

2- د يوې دايرې محيط، چې شعاع يې د اوږدوالی يو واحد وي لاس ته راوړئ.

3- د يوې دايرې مساحت، چې شعاع يې د اوږدوالی يو واحد وي لاس ته راوړئ.

د دوهم څپرکي لنډيز

- هغه اړيکې چې د يو هندسي شکل د کرښو د اجزاوو تر منځ موجودې وي، د اوږدوالي د اړيکو په نامه يادېږي.
- که چېرې د يوې دايرې له بهرنيو ټکو څخه پر دايره دوه قاطع کرښې رسم شي، د يوې قاطع د قطعاتو د ضرب حاصل، د بل قاطع د قطعاتو د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

يعني: $\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\ \overline{PD}$

- که چېرې د يوه ټکي څخه دوه قاطع کرښې پر يوه دايره داسې رسم شي، چې دويم قاطع د دايرې له مرکز څخه تير شي، نو د قاطع او د هغه د بهرنی قطعی د ضرب حاصل له يوې ټاکلې اندازې يعنې: $d^2 - r^2$ سره مساوي دي.
- د يوه باندنی ټکي څخه پر يوې دايرې دوه مساوي مماسونه رسميدلای شي.
- که چېرې $d^2 - r^2 > 0$ يا $d^2 > r^2$ وي ټکی د دايرې په بهر کې پراته دی.
- که چېرې $d^2 = r^2 = 0$ يا $d^2 = r^2$ يا $d = r$ وي، ټکی د دايرې پر محيط پروت وي.
- که چېرې $d^2 - r^2 < 0$ يا $d^2 < r^2$ وي ټکی د دايرې په دننه کې پروت دی.
- هغه زاويې چې دقاطع کرښو په مرسته د دايرې په دننه کې منځ ته راځي د دايرې دننی زاويې بلل کېږي.
- د يوې دايرې د هرې دننی زاويې پراخوالی د هغې د مخامخ قوسونو د مجموعې له نيمايي سره مساوي دي. $\hat{\alpha} = \dfrac{\overset{\frown}{a} + \overset{\frown}{b}}{2}$

- هغه زاويه چې د دوو قاطع کرښو، دوو مماسونو، يا يو قاطع او يو مماس د پريکړې څخه د دايرې په بهر کې منځ ته راغلې وي د دايرې باندنی زاويه بلل کېږي.
- د يوې دايرې د هرې باندنی زاويې پراخوالی د هغې د مخامخ قوسونو، تفاضل له نيمايي سره مساوي دی، يعنې: $\hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{a} - \overset{\frown}{b}}{2}$

- هغه شکل چې د څو ټوټه کرښو په مرسته احاطه شوی وي مضلع بلل کېږي.

په دې شرط چې:

- دوه ضلعې يې يوازې په خپلو انجامونو کې سره پرېکړېږي.
- دوه ګاونډۍ ضلعې د يوې مستقيمې کرښې په اوږدوالی پرتې نه وي.
- هغه مضلع چې ضلعې او زاويې يې سره مساوي وي، منظم مضلع بلل کېږي.

هغه دايره چې د مضلع د راُسونو څخه تېره شي، د مضلع محيطي دايره بلل کېږي.

هغه دايره چې د مضلع پر ضلعو مماس وي، د مضلع محاطي دايره بلل کېږي.

هغه دايره چې د مثلث پر يوه ضلعه او د دوو نورو ضلعو په امتداد مماس وي، د مثلث بهرنی محاطي دايره بلل کېږي.

- د دوو متقاطع دايرو د مرکزونو ترمنځ کرښه په ګډ وتر عمود ده.
- که چيرې يوه څلور ضلعې مرسوم په دايره وي، د هغې د مخامخ زاويو مجموعه 180° دي.
- د دايرې محيط د مخامخ اړيکی په مرسته لاس ته راځي: $C = 2\pi r$
- د دايرې مساحت د مخامخ اړيکی په مرسته لاسته راځي: $A = \pi r^2$

د دویم څپرکي پوښتنې

- په لاندې سوالونو کې د هر سوال لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي دي د سم ځواب څخه دایره تاو کړئ.

1- که چیرې د P ټکی د دایرې پر محیط پروت وي د یوه ټکي طاقت نظر دایرې ته عبارت دی له:

a) 1 　 b) 2

c) 0 　 d) درې واړه ځوابونه سم دي.

2- که چیرې د P یو ټکی د دایرې په دننه کې پروت وي، د دې نقطې طاقت نظر یوې دایرې ته عبارت دی له:

a) د P دټکي طاقت مثبت دی. 　 b) د P ټکي طاقت منفي دی.

c) د P ټکي طاقت صفر دی. 　 d) درې واړه ځوابونه سم نه دي.

3- که دP ټکی د دایرې څخه د باندې پروت وي، دP ټکي طاقت نظریوې دایرې ته عبارت دی له:

a) $d - r$ 　 b) $d^2 - R^2$

c) $r - d$ 　 d) $R^2 - d^2$

4- که چیرې د یوې دایرې شعاع R او د دایرې دننی ټکی او مرکز واټن په d سره وښیو، د نوموړی ټکي طاقت نظر دایرې ته عبارت دی له:

a) $R^2 = d^2$ 　 b) $d^2 = R^2$

c) دواړه ځوابونه سم دي. 　 d) دواړه ځوابونه نا سم دي.

5- یو ټکی د $13cm$ په اندازه د $C(O,r)$ دایرې له مرکز څخه واټن لري که د دایرې قطر $10cm$ وي د قاطع د بهرنی برخې اوږدوالی د نوموړی ټکي څخه عبارت دی له:

a) 13 cm 　 b) 10 cm

c) 12 cm 　 d) 8 cm

6- که چیرې د P له ټکي څخه د یو مماس اوږدوالی د $C(O,r)$ دایرې سره $12cm$ او قطر یې 10cm وي د P او O د ټکو تر منځ واټن عبارت دی له:

a) 13 cm 　 b) 12 cm

c) 10 cm 　 d) 5 cm

7- که چیرې د $C(O,r)$ د دایرې د $\overline{AB}$ وتر د P ټکي پورې امتداد ورکړو داسې چې: $\overline{AP} = 8cm$ او $\overline{BP} = 2cm$ د $\overline{PT}$ د مماس اوږدوالی عبارت دی له:

a) 4 cm 　 b) 8 cm

c) 2 cm 　 d) درې واړه ځوابونه نا سم دي.

● په لاندې پوښتنو کې تش ځایونه په وړ کلمو ډک کړئ.

1- $d^2 - r^2$ د یوه ټکي .... نظر یوې دایرې ته دی.

2- که چیرې $\overline{PT}$ د $C(O,r)$ پر دایره مماس وي، د P د ټکي طاقت نظر $C(O,r)$ دایرې ته عبارت دی له .... $\overline{PT}^2$ دی.

3- که چیرې د P ټکی د دایرې پر محیط پروت وي، نو د ټکي طاقت نظر دایرې ته .... دی.

4- که ټکی د دایرې په دننه کې وي، نو د ټکي طاقت نظر دایرې ته .... دی.

5- که ټکی د دایرې څخه د باندې وي، نو د ټکي طاقت نظر دایرې ته .... دی.

6- که $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$ وي، د A, B, C او D د .... پر محیط پرتې وي او د P ټکی د .... په دننه او یا بهر پروت دی.

7- که د A, B او T ټکي د دایرې پر محیط پراته وي، A, B او P د یوې کرښې په امتداد دی او د P ټکی د دایرې بهر کې دی په دې توګه ....= $\overline{PT}^2$ دی.

● د سمو جملو په مخامخ کې د(س) او د ناسمو جملو مخامخ کې د(ن) توری ولیکئ.

1- (   ) د یوه ټکي طاقت نظر دایرې ته د ټکي او د دایرې مرکز واټن له مربع سره مساوي دی.

2- (   ) که ټکی د دایرې پر محیط پروت وي د ټکي طاقت نظر دایرې ته صفر دی.

3- (   ) که ټکی د دایرې په دننه کې وي د ټکي طاقت نظر دایرې ته منفي دی.

4- (   ) که ټکی د د دایرې په بهر کې وي دټکي طاقت نظر دایرې ته مثبت دی.

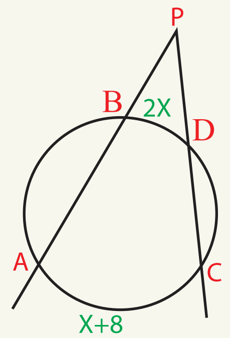
5- (   ) د یوه ټکي طاقت نظر هرې دایرې ته مثبت دی.

6- (   ) د یوه ټکي طاقت نظر دایرې ته $d^2 - r^2$ دي که د d د ټکي واټن دایرې ته او r د دایرې وړانګه وي.

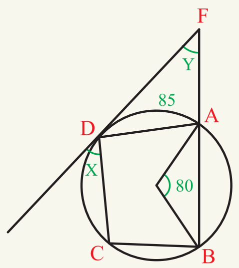
7- (   ) که دوه دایرې مماس وي د هغوی طاقت نظر ګډ مماس ته په هر ټکي کې مساوي وي.

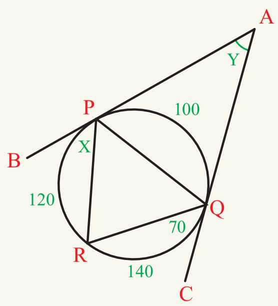
● لاندې پوښتنې په تفصیل سره حل کړئ.

1- په لاندې شکل کې $\hat{P}=(x+1)$ او مخامخ قوسونه يې په ترتيب سره $(2x)^0$ او $(x+8)^0$ وي د $A\hat{P}C$ د زاويې پراخوالی پيدا کړئ.

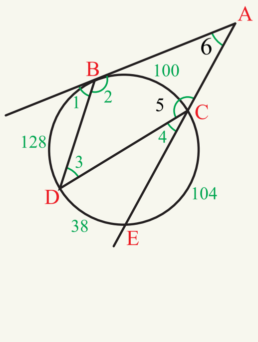


2- د $\hat{x}$ او $\hat{y}$ د زاويو پراخوالی په لاندې شکلونو کې پيدا کړئ.

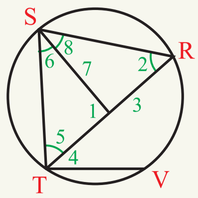




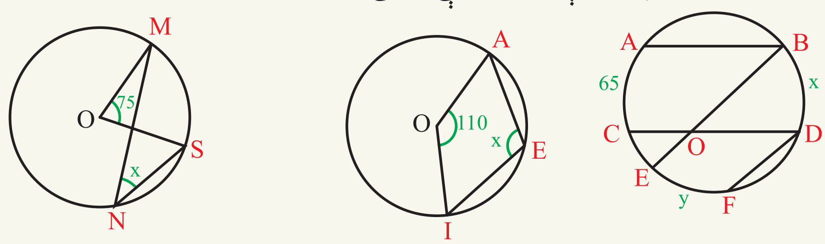
3- په لاندې شکل کې $\overline{AB}$ پر دايره مماس دی که $\overset{\frown}{DB}=128^\circ$ او $\overset{\frown}{CE}=104^\circ$ وي د $\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5}$ او $\hat{6}$ زاويو پراخوالی پيدا کړئ.



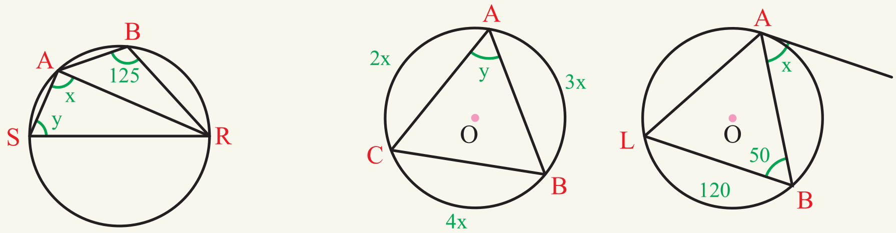
4- د $C(O,r)$ پـه دايـره کـې $RS \,//\, TV$, $R\hat{T}S = 70^\circ$ او RT د دايـرې قطـر دی د $\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5},\hat{6},\hat{7}$ او $\hat{8}$ زاويو اندازه پيدا کړئ.



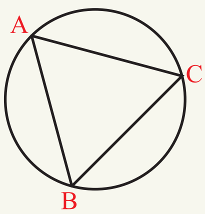
5- د $\hat{x},\hat{y}$ زاويو اندازه په لاندې شکلونو کې وټاکئ.



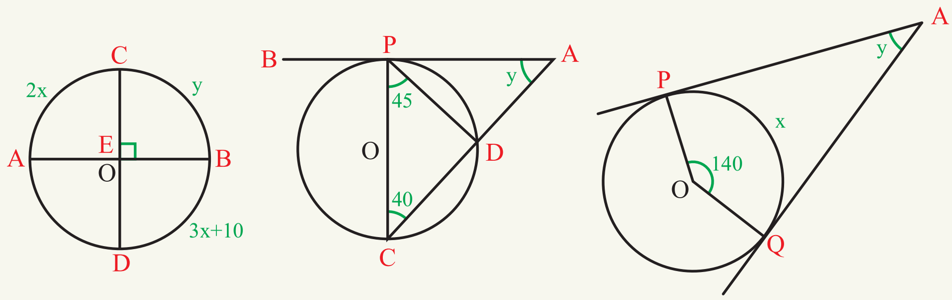
6- د $\hat{x}$ او $\hat{y}$ زاويو اندازه په لاندې شکلونو کې پيدا کړئ.



7- د محاطي دايرې د تعريف له مخې وښيئ چې د هر مثلث دننيو زاويو مجموعه 180° وي.



8- په لاندې شکلونو کې د $\hat{x}$ او $\hat{y}$ زاويو اندازه پيدا کړئ.



دریم څپرکی

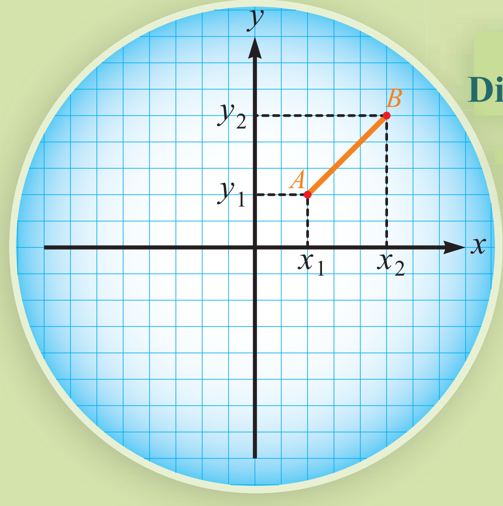
تحلیلي هندسه

تحليلي هندسه

Analytic Geometry

د الجبر ا و هندسې تر منځ اړيکې له تحليلي هندسې څخه عبارت دی. چې د الجبري معادلو او هندسې شکلونو په مرسته تر بحث لاندې نيول کېږي، فرانسوي رياضي پوه ديکارت د لومړی ځل لپاره د ټاکلو هندسي اشکالو او الجبري معادلو ترمنځ اړيکه و څېړله ويې ويل، چې ځينې الجبري معادلې يو ټاکلی هندسي شکل لري. څرنگه چې د هندسې د علم بنسټ ټکی او دالجبري معادلو بنسټ عدد جوړوې نو لدې کبله لومړی د ټکي او عدد ترمنځ اړيکي تر څېړنې لاندې نيسو، ديکارت د عدد او ټکي ترمنځ د اړيکو د څېړنې لپاره د قايم مختصاتو د محورونو داسې يو سيستم راوپېژند چې تراوسه د دکارت په نامه يادېږي.

د دوو ټکو ترمنځ واټن یا فاصله
Distance between two Point

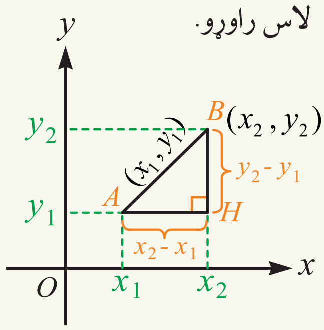


د $A(x_1,y_1)$ او $B(x_2,y_2)$ دوه ټکي د وضعیه کمیاتو په سیستم کې د AB یوه ټوټه کرښه ټاکي ستاسې په اند څرنګه کولای شوچې د A او B ټکو ترمنځ واټن(فاصله) حساب کړو.

فعالیت

- د A(3,5) او B(5,4) ټکي د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وښیئ.
- د AB کرښه رسم کړئ.
- د A او B ټکو ترمنځ واټن(فاصله) حساب کړئ.

د پورتني فعالیت څخه کولای شو په عمومي ډول د $A(x_1,y_1)$ او $B(x_2,y_2)$ دوو ټکو ترمنځ واټن(فاصله) په لاندې ډول په لاس راوړو.
په لاندې شکل کې $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث یوقایم الزاویه مثلث دی. ولې؟
د فیثاغورث د قضیې په مرسته کولای شو د A او B ټکو ترمنځ واټن په لاندې ډول په لاس راوړو.



$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2$ .... د فیثاغورث د قضیې

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AH} = x_2 - x_1\\ \overline{BH} = y_2 - y_1\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

لومړی مثال: د $A(1,7)$ او $B(5,4)$ ټکو ترمنځ واټن(فاصله) پیدا کړئ.

حل: د دوو ټکو له فاصلې د فورمول څخه په ګټه اخستنې لیکلای شوچې:

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$\overline{AB}=\sqrt{(5-1)^2+(4-7)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}$$

$$\overline{AB}=5\ unit$$

دویم مثال: د $A(3,4)$ ټکي واټن(فاصله) له مبدا څخه حساب کړئ.

حل:پوهیږوچې د مبدا مختصات $O(0,0)$ دي نو دوو ټکو ترمنځ د واټن د فورمل $\overline{0A}=\sqrt{x^2+y^2}$ څخه په لاس راځي:

$$\overline{OA}=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}\Rightarrow\overline{OA}=5$$

د $A(x_2,y_2)$ او $B(x_2,y_2)$ واټن عبارت له: $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

د $P(x,y)$ یو اختیاري ټکی واټن د قایمو کمیاتو له مبدا آ څخه عبارت دی له:

$$\overline{OA}=\sqrt{x^2+y^2}$$

پوښتنې

1- د $A(0,3)$ او $B(2,0)$ ټکو ترمنځ واټن پیداکړئ.

2- کـه $A(4,6)$ ، $B(-2,4)$ او $C(-8,2)$ د یوه مثلث دراسونو مختصات وي د مثلث ډول وټاکئ.

3- د K عددي قیمت داسې وټاکئ چې د $A(2,3)$ او $B\ (5K,6)$ ټوټه کرښې اوږدوالی پنځه برابره شي.

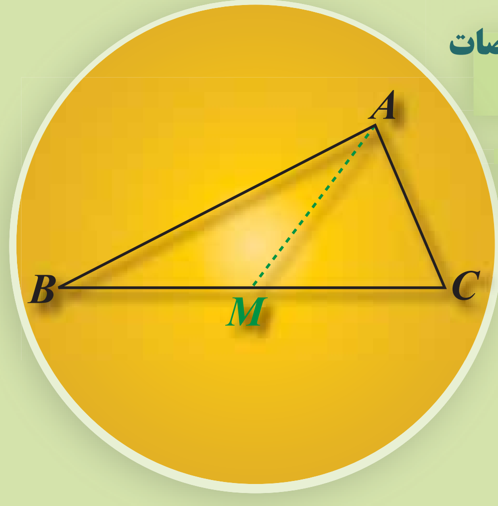
4- د $P(1,\sqrt{3})$ او $Q(-1,1+\sqrt{3})$ ترمنځ واټن پیداکړئ.

5- کـه $A(-1,4), B(-3,-7)$ او $C(1,9)$ د یوه مثلث د راسونومختصات وي د مثلث محیط حساب کړئ.

6- د هغه مثلث مساحت پیداکړئ، چې راسونه یې د $A(2,0)$ ، $B(6,2)$ او $C(1,2)$ په ټکوپراته وي.

7- کـه $A(10,5)$ ، $B(3,2)$ او $C(6,-5)$ د یوه مثلث د ښوکو(راسونه) مختصات وي د مثلث ډول وټاکئ.

د یوه قطعه خط دمنځنی ټکي مختصات

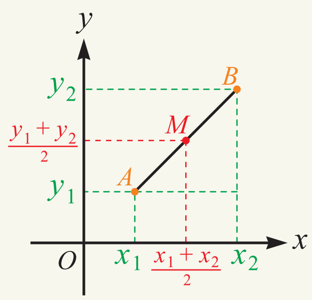


د $\overset{\Delta}{ABC}$ په مثلث کې د $\overline{AM}$ قطعه خط د مثلث میانه ده، د میانې ځانګړتیا بیان کړئ.

فعالیت

- د $D(2,0)$ او $E(6,0)$ ټکي دوضیعه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.
- که چیرې د C ټکی د $\overline{DE}$ ټوټه کرښې منځنی ټکی وي، د هغې مختصات ولیکئ.
- د C ټکي مختصات د D او E ټکو له مختصاتوسره څه اړیکه لري؟
- د $P(0,1)$ او $Q(0,4)$ ټکي د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.
- که چیرې د R ټکی د $\overline{PQ}$ ټوټه کرښې منځنی ټکی وي د هغې مختصات په لاس راوړئ.
- د R ټکي مختصات د P او Q ټکو د مختصاتوسره څه اړیکه لري؟

د پورتنی فعالیت پایله کولای شو چه په بشپړډول داسې بیان کړو: که $A(x_1,0)$ او $B(x_2,0)$ دوه ټکو د x په محوررو پراته وي نو د M ټکي مختصات چې د $\overline{AB}$ ټوټه کرښې منځنی ټکی دی داسې په لاس راځي: $M(\frac{x_1+x_2}{2},0)$

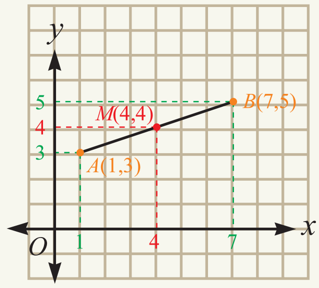


که $P(0,y)$ او $Q(0,y_2)$ دوه ټکي د y په محور پراته وي د M د ټکي مختصات چې د $\overline{PQ}$ ټوټه کرښه منځنۍ ټکی دی داسې په لاس راورو: $M(0,\frac{y_1+y_2}{2})$

په بشپړ ډول $A(x_1,y_1)$، $B(x_2,y_2)$ د وضعیه کمیاتو په سیستم کې دوه ټکي او M د $\overline{AB}$ کرښې منځنی ټکی وي نو د M ټکي مختصات داسې په لاس راځي: $M(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$

لومړی مثال: که چیرې $A(1,3)$ او $B(7,5)$ د $\overline{AB}$ ټوټه کرښې د پیل اوپای مختصات وي د ټوټه کرښې د منځنۍ ټکي مختصات په لاس راوړئ.

حل: دیوې ټوټه کرښې د منځنی ټکی د مختصاتوڅخه په ګټه اخیستنه لیکلای شوچې:



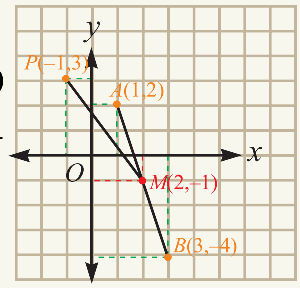
$$M(\frac{x_1+x_2}{2} \ , \ \frac{y_1+y_2}{2})$$

$$M(\frac{1+7}{2} \ , \ \frac{3+5}{2})$$

$$M(4,4)$$

دویم مثال: د $P(-1,3)$ ټکی واټن د هغې مستقیمې کرښې له منځنی ټکي څخه پیداکړئ چې د $A(1,2)$ او $B(3,-4)$ ټکو څخه تیرشي.

حل: د P ټکي واټن د AB مستقیمې کرښې له منځنی ټکي د پیداکولولپاره لومړی د AB منځنی ټکي مختصات په لاس راوړو، نولیکلای شوچې:



$$M_{\overline{AB}} = (\frac{x_1+x_2}{2} \ , \ \frac{y_1+y_2}{2})$$

$$= (\frac{1+3}{2}, \frac{2-4}{2}) = (2,-1) \Rightarrow M_{\overline{AB}} = (2,-1)$$

$$\overline{PM} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(2+1)^2+(-1-3)^2}$$

$$\overline{PM} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25}$$

$$\overline{PM} = 5 \text{ unit}$$

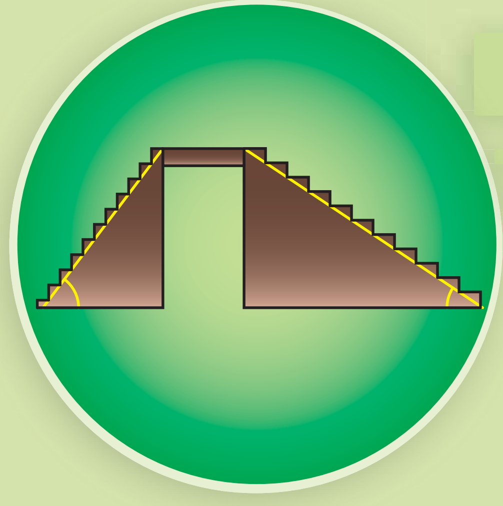
پوښتني

۱- د یوه مثلث درې راسونه $A(5,-2)$، $B(3,-1)$ او $C(1,5)$ راکړل شوي دي د $\overline{AM}$ د میانې اوږدوالی پیداکړئ.

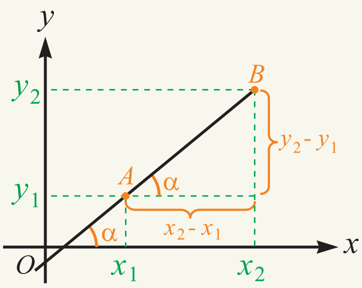
۲- که چیرې $A(2,4)$، $B(5,9)$، $C(14,9)$ او $D(11,4)$ ټکي د یوه متوازي الضلاع راسونه وي د متوازي الضلاع د قطرونو د پرېکړې د ټکو مختصات پیداکړئ.

۳- که چیرې $A(-1,4)$، $B(-3,-7)$ او $C(1,9)$ د یوه مثلث راسونه وي د هغه د میانې یا مینځنی کرښې اوږدوالی پیداکړئ چې د BC په ضلع رسمیږي.

د مستقیمې کرښې میل



شکل ته وګورئ په کومه زینه په اسانۍ سره ختلی شئ ولې؟ دلیل یې بیان کړئ.



کــه $A(x_1,y_1)$ او $B(x_2y_2)$ د $\overline{AB}$ مسـتقیمې کرښــې دوه اختیاري ټکي وي د $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ نسبت ته د مسـتقیمې کرښـې میـل وایي او په لانـدې ډول یې لیکي: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

لومړی مثال: د هغې مستقیمې کرښې میل پیداکړئ چې د $A(3,5)$ او $B(4,6)$ ټکو څخه تیرشي.

حل: پوهیږوچې د مستقیمې کرښې میل د $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ رابطې څخه لاسته راځي نولرو چې:

$$m_{\overline{AB}}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{6-5}{4-3}=1$$

دویم مثال: هغه مستقیم چې د $A(2,5)$ او $B(4,k)$ ټکو څخه تیریږی د k قیمت په هغه کې داسې وټاکئ چې د مستقیمې کرښې میل ۳ وي.

حل: د k قیمت د لاسته راوړلو لپاره ددې رابطې $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ څخه په لاندې ډول ګټه اخلو:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$3=\frac{k-5}{4-2}$$

$$k-5=6 \Rightarrow k=11$$

دریم مثال: د هغه مستقیمې کرښې میل پیداکړئ چې د P(2,3) ټکي او د وضیعه کمیاتو له مبدا آ څخه تیرشي.

حل: څرنګه چې مستقیه کرښه د وضیعه کمیاتو له مبدا څخه تیریږي نود مبدا مختصات O(0,0) دی، نومیل یې په لاندې ډول په لاس راورو:

$$m_{\overline{PO}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3}{2}$$

$$m_{\overline{PO}} = 1.5$$

فعالیت

- د A(2,3) او B(4,6) ټکی د وضیعه کمیاتو په سیستم کې وښیئ.
- هغه مستقیم چې د A او B ټکوڅخه تیریږي رسم کړئ او په Δ_1 سره یې وښیئ.
- د Δ_1 مستقیم میل په لاس راوړئ.
- د Δ_1 مستقیم د X محور له مثبت جهت سره څه ډول زاویه جوړوي.
- د M(1,5) او N(4,2) ټکي په همغه وضیعه کمیاتوکې په بل رنګ وټاکئ.
- هغه مستقیم چې د M او N ټکوڅخه تیریږي هغه ته Δ_2 ووایئ.
- د Δ_2 مستقیم میل په لاس راوړئ.
- د Δ_2 مستقیم د X محور د مثبت جهت سره څه ډول زاویه جوړوي؟
- د تشکیل شویو زاویو او کرښوترمنځ څه ډول اړیکه شته.

د پورتنی فعالیت څخه لاندې پایلې په لاس راځي.

د هرې مستقیمې کرښې میل په هغه زاویه پورې اړه لري، چې مستقیمه کرښه يې د X له محور سره جوړوي.

که یوه مستقیمه کرښه د X محور له مثبت جهت سره حاده زاویه جوړه کړي، میل یې یومثبت عدد دی.

که یوه مستقیمه کرښه د X محور له مثبت جهت سره منفرجه زاویه جوړه کړي میل یې یو منفي عدد دی.

پوښتنې

۱- د هغه مستقیمې کرښې میل په لاس راوړی چې د A(1,1) او B(−1,−1) ټکوڅخه تیرشي.

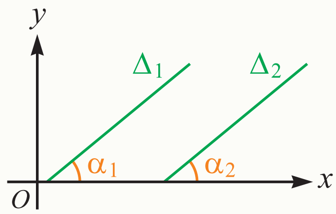
۲- هغه مستقیم چې د $A(-2,2\sqrt{3})$ او B(1,a) ټکوڅخه تیریږي، د a عددي قیمت داسې و ټاکئ چې د مستقیم میل $\sqrt{3}$ وي.

۳- که چیرې B(3,−1), A(5,−2) او C(1,5) ټکي د یوه مثلث راسونه وي د $\overline{BC}$ ضلعې د میانې میل پیداکړئ.

د موازي کرښو میل

په ورکړل شوي شکل کې زينه په پام کې ونيسئ د هغې د بازوګانو تر منځ څه ډول اړيکه شتون لري.

فعاليت



- د راکړل شويو وضيعه کمياتو په سيستم کې د Δ_1 او Δ_2 موازي کرښې يو له بل سره داسې رسم کړئ چې د x محور له مثبت جهت سره حاده زاويې جوړې کړي.
- د Δ_1 او Δ_2 کرښو ميلونه حساب او يو بل سره يې پرتله کړئ، کرښې يو بل سره څه اړيکې لري؟
- که چيرې د Δ_1 مستقيم د x محور له مثبت جهت سره د α_1 زاويه د Δ_2 مستقيم د x محور له مثبت جهت سره د α_2 زاويه جوړه کړي نو α_1 او α_2 يو له بل سره څه اړيکه لري.

په عمومي ډول د پورتنی فعاليت پايله په لاندې ډول بيانوو:
موازي کرښې د مساوي ميلونو لرونکې دي.
که چيرې دوه مستقيمه کرښې مساوي ميلونه ولري په پايله کې هغه زاويې چې د X محور له مثبت جهت سره يې جوړوي يو له بل سره مساوي دي.

مثال: که چيرې د Δ_1 مستقيم د $A(2,5)$ او $B(-6,-11)$ ټکو او د Δ_2 مستقيم د $C(-4,-6)$ او $D(3,8)$ ټکو څخه تيرشي، د Δ_1 او Δ_2 کرښې يوه له بلې سره څه اړيکه لري؟

$$\left.\begin{array}{l} m_{\overline{AB}} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ m_{\Delta_1} = \dfrac{-11-(5)}{-6-2} = \dfrac{-16}{-8} = 2 \Rightarrow m_{\Delta_1} = 2 \\ m_{\Delta_2} = \dfrac{8+6}{3+4} = \dfrac{14}{7} = 2 \Rightarrow m_{\Delta_2} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow m_{\Delta_1} = m_{\Delta_2} \Rightarrow \Delta_1 \parallel \Delta_2$$

خرنگه چې د Δ_1 او Δ_2 میلونه سره مساوي دي نو نومړي کرښې یوه له بلې سره موازي دي.

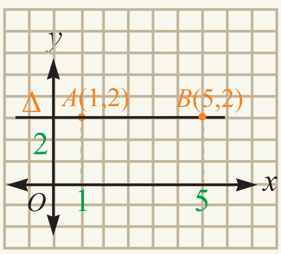
فعالیت

- د $A(1,2)$ او $B(5,2)$ ټکي د وضیعه کمیاتو په مستوي کې وټاکئ.
- هغه مستقیمه کرښه چې له A او B ټکوڅخه تیریږي رسم او په Δ یې ونوموئ.
- د Δ مستقیم د x محور له مثبت جهت سره څه ډول زاویه جوړوي.
- د Δ مستقیم میل حساب کړئ.

د پورتنی فعالیت پایله په لاندې ډول بیانوو:

که چیرې A او B دوه اختیاري ټکي او مساوي ترتیبونه ولري، لکه: $B(x_2,a), A(x_1,a)$

هغه کرښې چې د A او B ټکوڅخه تیریږي د x له محورسره موازي دی. اومیل یې له صفرسره مساوي دی. یعنې: $m = \dfrac{a-a}{x_2-x_1} = 0$



فعالیت

- د $M(3,2)$ او $N(3,5)$ ټکي د وضیعه کمیاتو په مستوي کې وټاکئ.
- هغه مستقیمه کرښه چې د M او N ټکوڅخه تیریږي رسم او په Δ یې ونوموئ.
- د Δ مستقیمه کرښه د x له محور سره څه ډول زاویه جوړ وي د Δ مستقیم میل په اړه څه ویلای شئ؟

د پورتني فعالیت څخه دې پایلې ته رسیږو هغه مستقیمه کرښه چې د x له محورسره قایمه زاویه جوړه کړي نشوکولای د هغې میل حساب کړو، په دې حالت کې ویل کیږي چې د Δ مستقیم خط معین یا ټاکلی میل نه لري.

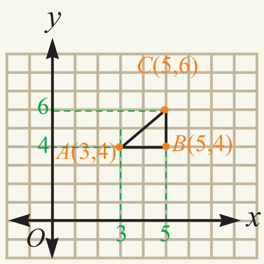
مثال: که چیرې د $A(3,4)$ ، $B(5,4)$ او $C(5,6)$ ټکي د یوه مثلث راسونه وي، د مثلث ډول وټاکئ اوهغه د وضیعه کمیاتو په سیستم کې رسم کړئ.

حل: خرنګه چې د AB مستقیمه کرښه د x له محور سره موازي ده، نو میل یې صفر دی.

$$m_{\overline{AB}} = \frac{4-4}{5-3} = \frac{0}{2} = 0$$

په همدې ډول د BC مستقیمه کرښه د y له محور سره موازي نومیل یې نامعین(نه دی تعریف شوی)دی.

$$m_{\overline{BC}} = \frac{6-4}{5-5} = \frac{2}{0} = \infty$$



$$\overline{AB}^2 = (5-3)^2 + (4-4)^2 = 4$$
$$\overline{BC}^2 = (5-5)^2 + (6-4)^2 = 4$$
$$\overline{AC}^2 = (5-3)^2 + (6-4)^2 = 8$$
$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$$

په پایله کې

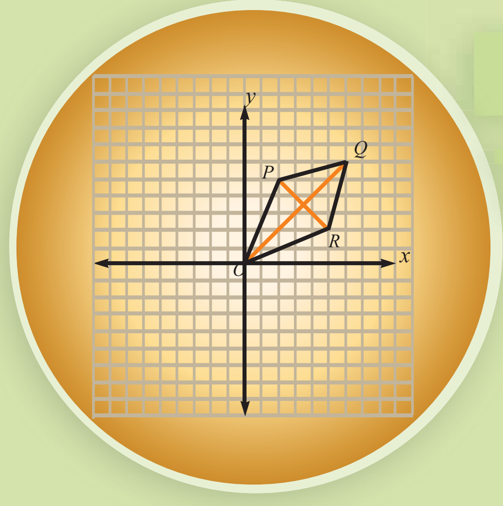
خرنګه چې د فیثاغورث قضیه پکې تطبیق کیږي نو د $\overline{AB}$ مستقیمه کرښه د $\overline{AC}$ په مستقیمې کرښې عمود ده نود $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث قایمه الزاویه دی.

هغه مستقیمه کرښه چې د x محور سره موازي او یا د y په محور عمود وي میل یې صفردی.
هغه مستقیمه کرښه چې د x په محور عمود یا د y له محور سره موازي وي میل یې نه دی تعریف شوی.(معین عدد نه دی)

پوښتني

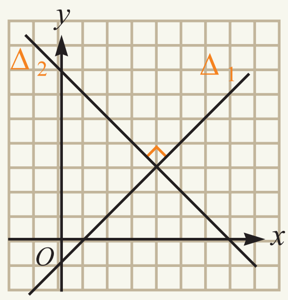
1- که د $A(3,0)$ ، $B(0,5)$ ، $C(-3,0)$ او $D(0,-5)$ د یوې څلورضلعي راسونه وي:
الف: د څلورضلعي مخامخ ضلعې یوه له بلې سره څه اړیکې لري.
ب: د قطرونو میلونه پیدا کړئ.
۲- $A(3,4), B(-3,4), C(3,-4)$ او $D(-3,-4)$ ټکي په پام کې ونیسئ.
الف: هغه مستقیمه کرښه چې د A او B ټکو څخه تیریږي له هغې کرښې سره چې د C او D ټکوڅخه تیریږي څه اړیکې لري؟
ب: هغه مستقیمه کرښه چې د A او B ټکو اوهغه کرښه چې د C او D ټکو څخه تیریږي څه اړیکه لري؟
ج: د $ABCD$ څلورضلعي څه ډول څلور ضلعي ده؟
د: د قطرونو میل یې پیدا کړئ.

د یو پر بل عمود مستقیمو کرښو میل



$OPQR$ خلورضلعي یولوزي دی.
کولای شئ د لوزی خانگړتیا د هغې د راسونو د مختصاتو په مرسته بیان کړئ.

تعریف



د Δ_1 او Δ_2 دوه مستقیمي کرښی چې میلونه یې m_1 او m_2 دي هغه وخت یو پربل عمود دي چې لاندې رابطه د هغوی ترمنځ موجوده ده. $m_1 \cdot m_2 = -1$

لومړی مثال: هغه مستقیمه کرښه چې د $A(7,5)$ او $B(1,1)$ او هغه چې د $C(0,5)$ او $D(2,2)$ ټکو څخه تیریږي له یوبل سره څه اړیکه لري.

حل:

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-5}{1-7} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$

$$m_{\overline{CD}} = \frac{2-5}{2-0} = \frac{-3}{2}$$

$$m_{\overline{AB}} \cdot m_{\overline{CD}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{-3}{2} = -1$$

په پایله کې د $\overline{AB}$ او $\overline{CD}$ مستقیمې کرښې یو پربل عمود دي.

فعالیت

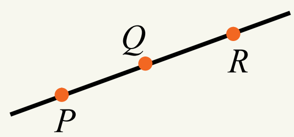
- د $C(4,4), B(1,3), 0(0,0)$ او $D(3,1)$ ټکي د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وښیئ.
- د $OBCD$ شکل رسم کړئ.
- د $\overline{OB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ او $\overline{DO}$ ضلعو اوږدوالي پیدا کړئ.

- د $\overline{OBCD}$ خلورضلعي څه ډول خلورضلعي ده؟
- وښيئ چې د $\overline{OC}$ او $\overline{BC}$ قطرونه يو پر بل عمود دي.

پوهيږو چې په يوه مستوي کې د دوو ټکوڅخه يوازې يو مستقيم تيريږي په کوم حالت کې له دريو ټکو څخه يومستقيم خط تيريدلای شي؟

تعريف

د Q, P او R ټکي هغه وخت پر يوه مستقيم پراته دي چې د $\overline{PQ}$ ميل د $\overline{QR}$ له ميل سره مساوي وي.



دويم مثال: د $A(0,-1)$, $B(2,3)$ او $C(-1,-3)$ دري ټکي په پام کې ونيسئ، وښيئ چې دا دري واړه ټکي په يوه مستقيمه کرښه پراته دي.

حل: د AB ميل عبارت دی له:

$$m_{\overline{AB}} = \frac{3+1}{2-0} = \frac{4}{2} = 2$$

$$m_{\overline{AC}} = \frac{-3-(-1)}{-1-0} = \frac{-2}{-1} = 2$$

د AC ميل عبارت ده له : $m_{\overline{BC}} = \frac{-3-3}{-1-2} = \frac{-6}{-3} = 2$

څرنګه چې د $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ او $\overline{BC}$ کرښو ميلونه سره مساوي دي نوپه پايله کې د B, A او C ټکي په يوه مستقيمه کرښه پراته دي.

- که چيرې د دوو کرښو د ميلونو د ضرب حاصل (-1) وي نو کرښې يوپربل عمودي دي.
- دري ټکي هغه وخت په يوه کرښه پراته وي چې د توټه کرښو ميلونه سره مساوي وي.

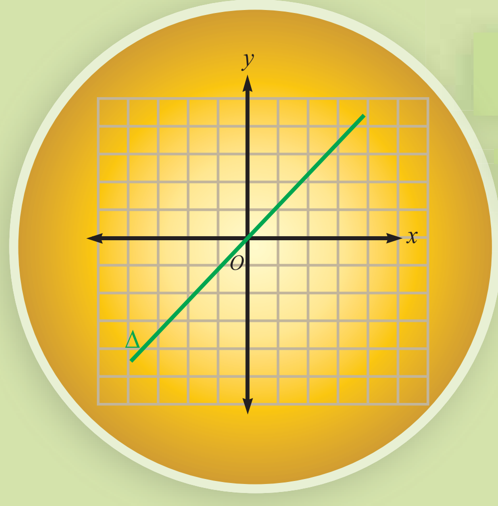
پوښتني

۱- که د $A(6,1)$ ، $B(8,3)$ او $C(6,5)$ ټکي د يوه مثلث خوکې يا راسونه وي وښيئ چې نوموړی مثلث قايم الزاويه دی.

۲- هغه توټه کرښه چې د $(7,5)$ او $(1,1)$ ټکو څخه تيريږي له هغه توټه کرښې سره چې د $(0,5)$ او $(2,2)$ ټکوڅخه تيريږي، اړيکې يې يو له بل سره وڅيرئ؟

۳- يوه کرښه چې د $(2,4)$ او $(7,5)$ ټکو اوبله د $(1,-4)$ او $(-3,-5)$ ټکوڅخه تيريږي د دواړو کرښوحالت يو له بل سره بيان کړئ.

د مستقيمې کرښې معادله



په مخامخ شکل کې د مستقيمې کرښې پرمخ څو ټکي وټاکئ.
د کرښې پرمخ د ټاکل شویو ټکو د فاصلې اوترتيب ترمنځ څه اړيکه وينئ.

فعاليت

- د $A(1,-1)$، $B(-2,2)$، $C(4,-4)$ او $D(-3,3)$ ټکي د وضيعه کمياتو په سيستم کې وټاکئ.
- ددې ټکو د ترلوڅخه کوم شکل لاسته راځي.
- د $A(1,1)$ او $B(0,0)$ ټکي د شکل پرمخ پراته دي اوکه نه؟ ولې؟

د پورتني فعاليت پايله په عمومي ډول داسې بيانوو:

د $y = x$ او $y = -x$ رابطې چې د يوې کرښې پرمخ د ټکو د فاصلې اوترتيب ترمنځ اړيکه راښيي د مستقيمې کرښې معادله بلل کيږي.

پوهيږو چې د هرو دوو ټکو څخه چې په يوه مستوي کې پرتې وي يوازې او يوازې يوه مستقيمه کرښه تيريږي. اوس غواړو چې د هغې مستقيمې کرښې معادله پيدا کړو چې له دوو اختياري ټکو څخه تيريږي.

فعاليت

- د $A(1,3)$ او $B(3,5)$ دوه ټکي د وضيعه کمياتو په سيستم کې وټاکئ.
- هغه مستقيمه کرښه رسم کړئ، چې له A او B ټکوڅخه تير شي.

ددې لپاره چې د $M(x,y)$ اختياري ټکی د $\overline{AB}$ کرښې پر مخ پروت وي، کوم شرط لازمي دی؟ د $\overline{AM}$ او $\overline{AB}$ توټه کرښو ميلونو له مساويتوب څخه کومه اړيکه لاسته راځي.

د پورتني فعاليت پايله کولای شو په عمومي ډول داسې بيان کړو.

د هغې کرښې معادله چې د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ له دوو ټکو څخه تیره شي داسې په لاس راځي:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

لومړی مثال: د هغې مستقیمې کرښې معادله ولیکئ چې د $A(3,4)$ او $B(2,-1)$ له ټکو څخه تیره شي.

حل: د هغې مستقیمې کرښې د معادلې په مرسته چې دوه ټکي یې معلوم وي لیکلای شو چې:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-4}{x-3}=\frac{-1-4}{2-3}\Rightarrow\frac{y-4}{x-3}=\frac{-5}{-1}=5$$

$$y-4=5(x-3)$$

$$y=5x-15+4=5x-11$$

دویم مثال: د هغې مستقیمې کرښې معادله ولیکئ چې د x محور په فاصله د $x=-3$ ټکي کې او د y محور په ترتیب د $y=4$ ټکي کې پرې کړي.

حل: څرنګه چې مستقیمه کرښه د x محور په $x=-3$ ټکي کې پرې کوي نو د مختصاتو په سیستم کې ددې ټکی د پریکړې مختصات $(-3,0)$ دی. په همدې ډول د y له محور سره د پریکړې د ټکو د مختصات د وضعیه کمیاتو په سیستم کې $(0,4)$ دی، اوس دیوه مستقیم د دوو ټکو پیژندلو په مرسته کولای شو د مستقیمې کرښې معادله داسې ولیکو:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Rightarrow\frac{y-0}{x-(-3)}=\frac{4-0}{0-(-3)}$$

$$\frac{y}{x+3}=\frac{4}{3}\Rightarrow 3y=4(x+3)$$

$$3y-4x=12$$

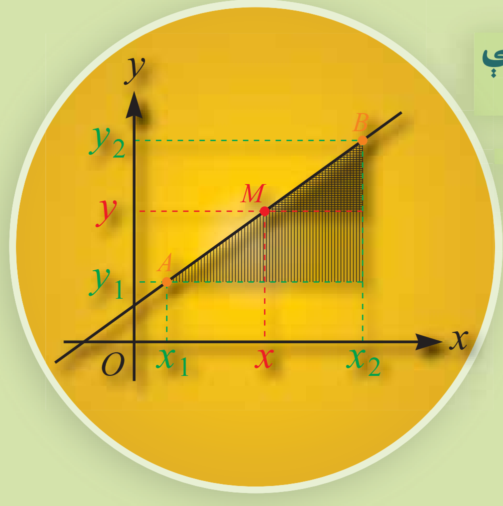
پوښتنې

1- د هغې مستقیمې کرښې معادله ولیکئ چې د $A(2,-1)$ او $B(3,4)$ له ټکو څخه تیره شي.

۲- د هغه مثلث د $\overline{AM}$ میانې معادله ولیکئ چې راسونه یې $A(1,3), B(-1,4)$ او $C(5,6)$ وي.

۳- د هغې مستقیمې کرښې معادله پیدا کړئ چې د x محور په $A(3,0)$ او د y محور په $B(0,-2)$ ټکي کې پرې کړي.

د هغه مستقیمې کرښې معادله چې میل او یو ټکی یې معلوم وي



په مخامخ شکل کې د $\overline{AB}$ میل د $\overline{MA}$ له میل سره څه اړیکه لري؟
بله هره ټوټه کرښه چې ددې ټوټه کرښې پرمخ وټاکو د $\overline{AB}$ له میل سره برابر میل لري، ولې؟

پوهیږو چې د هغې کرښې معادله چې د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ دوه ټکي بښکاره کوي عبارت ده له:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

یا

$$y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

څرنګه چې $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ د مستقیمې کرښې میل راښیي نو پورتنی معادله لاندې شکل غوره کوي. $y-y_1 = m(x-x_1)$

وروستنی معادله د هغې کرښې معادله ده چې میل ئې (m) او د $A(x_1, y_1)$ له نقطه څخه تیریږي.

لومړی مثال: د هغې مستقیمې کرښې معادله ولیکئ چې د $(2,3)$ ټکی څخه تیر شي او میل یې $\frac{1}{2}$ وي.

حل: څرنګه چې د مستقیمې کرښې میل او یو ټکی راکړل شوي ده نو د $y-b = m(x-a)$ معادلې څخه لیکلای شو:

$$y-3 = \frac{1}{2}(x-2)$$

$$2(y-3) = (x-2)$$

$$2y-6 = x-2$$

$$2y-x = 4 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x+2$$

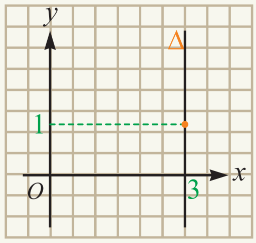
دويم مثال: هغه مستقيمه کرښه چې د $(3,1)$ ټکي څخه تيره او د x له محور سره موازي وي ولیکئ.

حل: څرنگه چې مستقيمه کرښه د x له محور سره موازي ده نوميل يې صفر دی. په پايله کې يې معادله په لاندې ډول ده .

$$y-b=m(x-a)$$
$$y-1=0\ (x-3)$$
$$y-1=0 \Rightarrow y=1$$

دريم مثال: د هغه مستقيمې کرښې معادله وليکئ چې د $(3,1)$ ټکي څخه تيره او د y له محور سره موازي وي.

حل: څرنگه چې مستقيم د y له محور سره موازي ده نوميل يې نه دی تعريف شوی (معين ميل نه لري) څکه پوهيږو چې ددې کرښې پرمخ دهر ټکي واټن يافاصله د $(3,1)$ ټکي سره مساوي ده چې معادله يې په دې ډول $x=3$ ده.



په عمومي ډول هغه کرښه چې د (a,b) ټکي څخه تيره او د x له محور سره موازي وي عبارت له $y=b$ سره ده.

هغه کرښه چې د (a,b) ټکي څخه تيريږي او د y له محور سره موازي وي عبارت له $x=1$ سره ده.

څلورم مثال: د Δ ټوټه کرښه د عمودي ناصف معادله پيدا کړئ چې د $A(2,-4)$ او $B(-2,4)$ ټکوڅخه تيره شي.

حل: د عمودي ناصف د معادلې د پيدا کولو لپاره لومړی د $\overline{AB}$ ټوټه کرښې ميل په لاس راوړو او بيا د هغې د منځ د $\overline{AB}$ د منځنې ټکي مختصات په لاس راوړو.

$$m_{\overline{AB}}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4+4}{-2-2}=-2 \quad\Rightarrow\quad m_{\Delta}=-\frac{1}{m_{\overline{AB}}}=\frac{1}{2}$$

$$m_{\overline{AB}}=(\frac{x_1+x_2}{2}\ ,\ \frac{y_1+y_2}{2})=(\frac{0}{2},\frac{0}{2})=(0,0)$$

$$y-y_1=m(x-x_1) \quad\Rightarrow\quad y-0=\frac{1}{2}(x-0)\Rightarrow y=\frac{1}{2}x$$

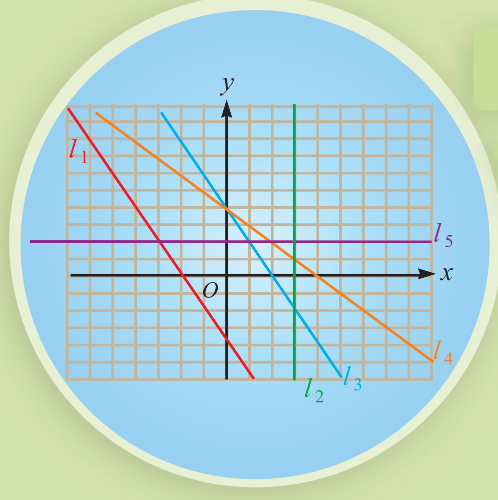
پوښتنې

1- د هغه مستيمې کرښې معادله پيدا کړئ چې ميل يې 4 او y محور د 3 په ټکي کې پرې کړي.

۲- د هغه مستقيمې کرښې معادله پيدا کړئ چې د $P(5,-4)$ ټکي څخه تيره او ميل يې ۲- وي.

۳- د $3x+4y-7=0$ معادله کې د مستقيم ميل او د y له محور سره يې د غوڅوونې ټکی پيدا کړئ.

د مستقیمې کرښې عمومي معادله



د l_1 , l_2 , l_3 , l_4 څلورکرښې نسبت یو بل ته کوم وضعیتونه لري؟

د یوې کرښې الجبري معادله د هغه ټکي د مختصاتو اړیکه چې په مستقیمه کرښه پروت دی راښیي په عمومي ډول د یوې مستقیمې کرښې معادله په لاندې ډول بیانوو:
په معیاري یا سټنډرډ ډول د یوې مستقیمې کرښې معادله په لاندې ډول ده.

$ax+by+c=0$ یا $y=\frac{-a}{b}x-\frac{c}{b}$ ، b, a او c حقیقي عددونه او $b\neq 0$ دی.

په پورتنۍ معادله کې $\frac{-a}{b}$ د کرښې میل او $\frac{-c}{b}$ د y له محور سره د پرېکړې ټکی یا تقاطع بلل کیږي.

نو ویلای شوچې د هرې کرښې معادله په یوه مستوي کې په لاندې ډول ده:

$y=mx+h$ چې m د مستقیمې کرښې میل او h د y محور سره د پرېکړې ټکی یا ترتیب دی په عمومي ډول هره خطي اړیکه د x او y له جنسه چې په هغه کې د x او y توان یو وي د مستقیمې کرښې معادله بلل کیږي.

فعالیت

- د $2x+3y-6=0$ او $y-x=2$ دوې مستقیمې کرښې د وضیعه کمیاتو په مستوي کې رسم کړئ.
- د هریوه مستقیم میل پیدا کړئ.
- دا دوې کرښې یوله بل سره څه وضعیتونه لري.

له پورتني فعالیت څخه پایله په لاندې ډول بیانوو:
که د دوو کرښو میلونه سره مساوي نه وي نوکرښو یوه بله پرې کړې دي.
په عمومي ډول که د $a_1x+b_1y+c_1=0$ او $a_2x+b_2y+c_2=0$ دوې کرښې یوه بله پرې کړي. وي نو میلونه یې سره مساوي نه دي له دې نه داسې پایله په لاس راځي.

$$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2} \quad \text{یا} \quad \frac{a_1}{b_1}\neq\frac{a_2}{b_2}$$

فعالیت

- د $-3x+y-5=0$ او $6x-2y+1=0$ مستقیمې کرښې د قایمو وضیعه کمیاتو په مستوي کې رسم کړئ.
- ددې مستقیمې کرښې میل په لاس راوړئ.
- دا دوې مستقیمې کرښې نسبت یو بل ته څه وضعیت لري؟ ولې؟

په عمومي ډول د $a_1x+b_1y+c_1=0$ او $a_2x+b_2y+c_2=0$ دوه مستقیمې کرښې هغه وخت موازي دي چې میلونه یې سره مساوي وي له دې ځایه دا پایله په لاس راځي چې د هغوی د متحولینو د ضریبونوترمنځ لاندې اړیکه موجوده ده.

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}\Rightarrow\frac{a_1}{a_2}\frac{b_1}{b_2}$$

که د متحولینو د ضریبونو ترمنځ $\frac{a_1}{b_1}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ اړیکه وجود ولري په دې حالت کې کرښې یو پر بل پرتې(منطبق) دي یاسره یو دي.

لومړی مثال: د $3x+4y=5$ او $4x-3y=-1$ د مستقیمونو اړیکې نظر یو بل ته بیان کړئ.

حل: د دوو کرښو د معادلاتو د ثابتوضریبونو نه په ګټه اخیستنه لروچې:

$a_1=3$ $b_1=4$ $c_1=-5$

$a_2=4$ $b_2=-3$ $c_2=1$

1- څرنګه چې $\frac{4}{-3}\neq\frac{3}{4}$ نو $\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{a_1}{a_2}$ دی په دې صورت کې کرښې یوبل غوڅوي.

2- څرنګه چې $\frac{4}{-3}\times\frac{3}{4}=-1$ نو $\frac{b_1}{b_2}\times\frac{a_1}{a_2}=-1$ دي نو د کرښو د پرېکړې په ټکی کې یوپربل عمود دي.

دویم مثال: په لاندې معادلوکی د k عددي قیمت داسې وټاکئ چې مستقیمونه یوبل سره عمودې وي $2x-6y+3=0$ او $kx+3y-1=0$

حل: د عمودیت شرط څېړو:

$$kx+3y-1=0\ ,2x-6y+3=0$$
$$a_1.a_2+b_1.b_2=0$$
$$2\cdot k+(-6)3=0\Rightarrow k=9$$

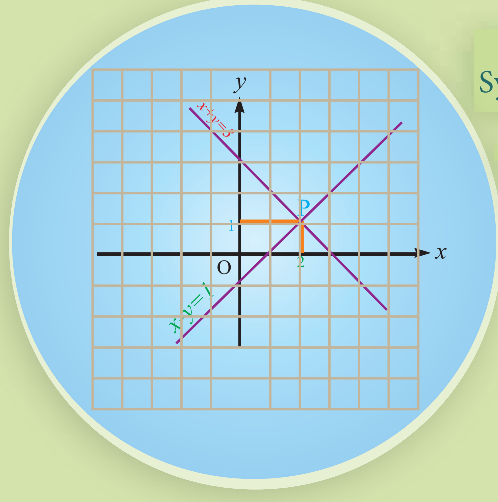
پوښتنې

۱- د $4x+3y-1=0$ او $8x+6y+5=0$ کرښوحالت یوبل ته بیان کړئ.

۲- د $8x-4y+10=0$ او $4x-2y+5=0$ کرښو حالت یو بل ته بیان کړئ.

۳- د $(k+1)x+ky=0$ او $2x-3y+5=0$ معادلوکې د k قیمت داسې وټاکئ چې کرښې یوه له بلې سره موازي وي.

د خطي معادلو سیستم
System of liear equation



شکل ته پام وکړئ ایا د P ټکي مختصات د کرښو په دواړو معادلو کې صدق کوي؟

فعالیت

- د $y = 4x - 2$ او $y = 3x + 5$ کرښو میلونه پیدا کړئ.
- دا کرښې نظر یوبل ته څه اړیکې لري؟ ولې؟
- پورتنی دواړې کرښې د وضعیه کمیاتو په سیستم کې رسم کړئ؟ د رسم شویو کرښو تر منځ څه اړیکه لیدل کیږي؟

په پورتنی فعالیت کې لیدل کیږي د هغو دوو کرښو چې میلونه یې مساوي نه وي یو بل د P په ټکي کې پرې کوي.

څرنګه چې د پریکړې ټکي د دواړو کرښو په مخ پراته دي نو د هغې ټکي مختصات د کرښو په معادلو کې صدق کوي. که د پریکړې د ټکي مختصات په P(x,y) وښیو نو: $y = -3x + 5$ او $y = 4x - 2$ معادلو څخه لیکلای شو، چې:

$$4x - 2 = -3x + 5$$
$$7x = 7$$
$$x = 1$$

د کرښو په معادلو کې د x قیمت په وضع کولو سره د y قیمت په لاس راوړلای شو:

$$y = 4x - 2 \Rightarrow y = 4(1) - 2 \Rightarrow y = 2$$

نو د پریکړې د ټکي مختصات عبارت دي له $P(1,2)$ په پایله کې ویلای شو، چې $P(1,2)$

ټکی داسې ټکی دی چې په دواړو معادلو کې حقیقت لري. چې د $\begin{cases} y = 4x - 2 \\ y = -3x + 5 \end{cases}$ خطي معادلو د سیستم حل دی.

فعالیت

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \quad .... \quad I \end{cases}$$

- مخامخ د خطي معادلو سیستم په پام کې ونیسئ.
- a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 او c_2 د څه په نامه یادیږي؟
- پورتنیو معادلو کې x او y ته څه ویل کیږي؟
- ایا ددې دوو کرښو د پریکړې د ټکي، د مختصاتو د سیستم یو حل کیدای شي؟

د خطي سیستم د حل لپاره د (I) سیستم داسې لیکو چې په هغه حالت کې چې b_1 او b_2 د صفر خلاف وي.

$$\begin{cases} y = -\dfrac{a_1}{b_1}x + \dfrac{c_1}{b_1} \\[2ex] y = -\dfrac{a_2}{b_2}x + \dfrac{c_2}{b_2} \end{cases}$$

نو لاندې درې حالتونه لرو:

1- که چیرې د دوو کرښو میلونه سره مساوي نه وي نو دا کرښې یو بل په یوه ټکي کې پرې کوي.

2- که چیرې د کرښو میلونه مساوي وي اما د y محوره یې د پریکړې ټکي مساوي نه وي هغه وخت دا دوه کرښې سره موازي دي.

3- که چیرې د کرښو میلونه او د y محور سره د پریکړې ټکي مساوي وي نو هغه دوه کرښې سره منطبق یا یو پر بل پراته وي.

لومړی مثال: د لاندې خطي معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

حل: د دې سیستم د حل لپاره نوموړی سیستم په دې ډول لیکو:

$$\begin{cases} y = 7 - x \quad \Rightarrow y = -x + 7 \\ y = 5 - 2x \Rightarrow y = -2x + 5 \end{cases}$$

لیدل کېږي چې د پورتنیو کرښو د معادلو میلونه 1- او 2- دي څرنګه چې د دوو خطونو میلونه مساوي نه دي نو کرښې یو بل په یوه ټکي کې پرې کوي، چې د پرېکړې د ټکي د مختصاتو د پیدا کولو لپاره په لاندې ډول عمل کوو:

$$-x+7=-2x+5$$
$$-x+2x=5-7 \quad \Rightarrow x=-2$$

د کرښو په یوه معادله کې د x پر ځای د 2- په وضع کولو سره لرو چې:

$$y=-x+7$$
$$y=-(-2)+7 \quad \Rightarrow y=9$$

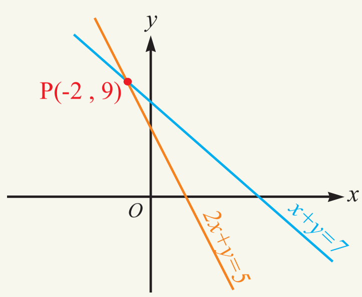
نو $(-2,9)$ د کرښو د معادلو د سیستم حل او د پرېکړې ځای دی، چې په شکل کې لیدل کېږي.

$x+y=7$

x	0	7
y	7	0

$2x+y=5$

x	0	5/2
y	5	0



دویم مثال: د لاندې خطي معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} 2x+\ \ y=5 \\ 12x+3y=6x+12 \end{cases}$$

حل: لومړی معادلې په لاندې ډول لیکو:

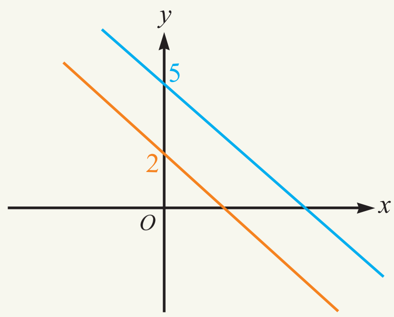
$$\begin{cases} y=-2x+5 \\ y=-\frac{6}{3}x+\frac{12}{3} \end{cases}$$

$y=-2x+5$

x	0	5/2
y	5	0

$y=-2x+4$

x	0	2
y	4	0



څرنګه چې د دواړو کرښو میل 2- دی په پایله کې کرښې خپل منځ کې موازي دي او یو بل نه پرې کوي یعنې د موازي کرښو د معادلو سیستم حل نه لري.

دریم مثال: د لاندې خطي معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x+y=7 \\ -28=-4x-4y \end{cases}$$

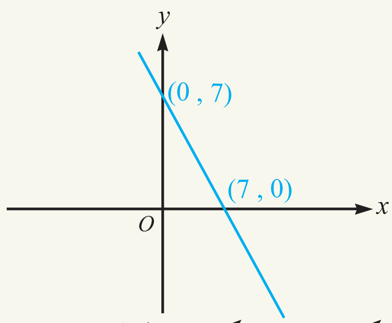
حل: لومړی د معادلاتو سیستم په لاندې ډول لیکو:

$$\begin{cases} y=-x+7 \\ y=\dfrac{-4}{4}x+\dfrac{28}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-x+7 \\ \\ y=-x+7 \end{cases}$$

x	0	7
y	7	0

x	0	7
y	7	0



لیدل کېږي، چې د کرښو میل او د y په محور د پرېکړې ټکی سره برابر دي نو دواړه کرښې سره منطبق دي په دې حالت کې کرښې ډېر ګډ ټکي لري په پایله کې د خطي معادلو سیستم ډېر حلونه لري.

که a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 او c_2 حقیقي عددونه x او y مجهولونه وي په دې حالت کې د خطي معادلو سیستم $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ دی.

- که چیرې کرښې یوه له بلې په یوه ټکي کې پرې کړي معادلې یو حل لري.
- که چیرې کرښې یوه له بلې سره موازي وي معادلې حل نه لري.
- که چیرې کرښې یو پر بل منطبق وي معادلې بې نهایت حلونه لري.

پوښتنې

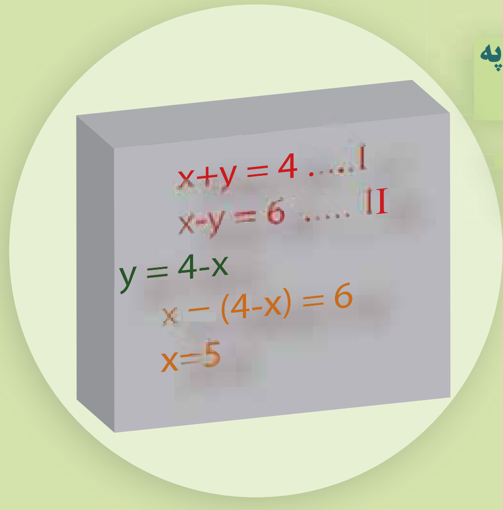
د لاندې خطي معادلو سیستمونه حل کړئ.

1) $\begin{cases} y=2x+5 \\ y=4x-3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-2=y \\ 3x-y=2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y=-x+3 \\ y=2x-1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 3x-2y=5 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 4x-y=6 \\ 8x-2y=6 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x-y=6 \\ -6x+2y=-10 \end{cases}$

د خطي معادلو د سیستم حل د تعویض په لاره(طریقه)

د خطي سیستم د معادلو حل ته پام وکړئ
د x مجهول عددي قیمت ستاسو په هاند
څنګه په لاس راغلی دی.



فعالیت

- د یوه مثلث د دوو زاویو مجموعه 100° او د تفریق حاصل یې 20° دی الجبري معادلې یې ولیکئ.
- د معادلاتو دا سیستم څو مجهوله لري؟ د هر یوه عددي قیمت پیدا کړئ.
- په لاس راغلي قیمتونه د معادلاتو په سیستم کې وازمایئ.

له پورتني فعالیت څخه د مسئلې حل او د خطي معادلو د سیستم د حل لاره په لاندې توګه داسې لیکو:

حل: که چیرې د مثلث زاویې په $\hat{A}$ او $\hat{B}$ ونوموو پورتنی عبارت د الجبري معادلو په بڼه داسې لیکو:

$$\hat{A}+\hat{B}=100^\circ \quad ....I$$
$$\hat{A}-\hat{B}=20^\circ \quad ....II$$

او د $\hat{A}$ زاویې قیمت د $\hat{B}$ زاویې له جنسه له لومړی معادلې څخه په لاس راوړو $\hat{A}=100^\circ-\hat{B}$ دا قیمت په دویمه معادله کې دی A په عوض وضع کوواو معادله حلوو:

$$100^\circ-\hat{B}-\hat{B}=20^\circ \Rightarrow -2\hat{B}=-80^\circ \Rightarrow \hat{B}=40^\circ$$

اوس د $\hat{B}$ قیمت د خطي معادلاتو په سیستم کې وضع کوو چې د $\hat{A}$ قیمت په لاس راځي.

$$\hat{A}-\hat{B}=20^\circ$$
$$\hat{A}-40^\circ=20^\circ \Rightarrow \hat{A}=20^\circ+40^\circ \Rightarrow \hat{A}=60^\circ$$

دویم مثال: لاندې د دوه مجهوله معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases}2x+3y=0\\3x+2y=10\end{cases}$$

حل: لومړی د یوه مجهول قیمت د بل مجهول له جنسه د یوې معادلې څخه په لاس راوړو او په بله معادله کې یې وضع کوو:

$$2x+3y=0 \quad \Rightarrow 2x=-3y \quad \Rightarrow x=-\frac{3}{2}y$$

$$\left.\begin{aligned}&3x+2y=10\\&3(-\frac{3}{2}y)+2y=10\\&-\frac{9}{2}y+2y=10\\&\frac{-9+4}{2}y=10\\&-5y=20 \quad \Rightarrow y=-4\end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned}&x=-\frac{3}{2}y\\&x=-\frac{3}{2}(-4)\\&x=-3(-2)\\&x=6\end{aligned}$$

د دوه مجهوله لومړۍ درجې معادلو د سیستم د حل لپاره په لاندې ډول عمل کوو:

- د یوه مجهول قیمت د بل مجهول له جنسه د یوې معادلې څخه په لاس راوړو او هغه په بله معادله کې د هغه په عوض وضع کوو.
- په لاس راغلې یو مجهوله لومړۍ درجه معادله حلوو او د مجهول قیمت په لاس راوړو.
- دا په لاس راغلی مجهول قیمت د سیستم په معادلو کې وضع او د بل مجهول قیمت په لاس راوړو.
- په لاس راغلې قیمتونه د سیستم په معادلو کې وضع کوو که سم له لاسه په دواړو معادلو کې یې حقیقت ولرې د معادلې حل سم، او پرته له هغه د معادلې حل نه او سم نه دی.

پوښتنې

د لاندې سیستمونو حل د تعویضي په طریقه په لاس راوړئ.

1) $\begin{cases}y=2x\\x+y=6\end{cases}$ 2) $\begin{cases}7x-2y=15\\6x-y=10\end{cases}$ 3) $\begin{cases}a+2b=2\\2a-3b=25\end{cases}$

4) $\begin{cases}\frac{2x-1}{3}+\frac{y+2}{4}=4\\\frac{x+3}{3}=\frac{x-y}{3}\end{cases}$ 5) $\begin{cases}\frac{5}{x}-\frac{3}{y}=1\\\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=7\end{cases}$ 6) $\begin{cases}\frac{2x}{3}+\frac{y}{5}=6\\\frac{x}{6}-\frac{y}{2}=-4\end{cases}$

د خطي معادلو د سیستم حل د افنا په لاره (طریقه)

$$x + y = ?$$
$$\frac{1}{3}x + y = ?$$
$$x = ?$$
$$y = ?$$

حمیرا، زحل ته وویل: که ته خپلي پیسي ما ته راکړې زه د 15 افغانیو ښتن کېږم، زحل حمیرا ته وویل: که ته د خپلو پیسو دریمه برخه ما ته راکړې زه د 5 افغانیو ښتنه کېږم، هره یوه څو افغانی لري؟

فعالیت

- د معادلو یو سیستم ولیکئ چې دوه معادلې او دوې مجهوله ولري.
- نوموړی سیستم د گراف په مرسته حل کړئ.
- نوموړې معادلې په تعویضي طریقه حل کړئ.
- ایا بله طریقه شته چې نوموړی معادلې پرې حل شي؟

یوه بله لاره چې د دوه مجهوله معادلو سیستم پرې حلولای شو د افنا طریقه یا لاره ده، چې په لاندې مثال کې یې څېړو.

مثال: د خطي معادلو دا سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} 7x+5y=41 \text{ .... I} \\ 5x-2y=7 \text{ .... II} \end{cases}$$

حل: لومړی معادلو ته داسې بدلون ورکوو، چې که هغوی خوا په خوا سره جمع یا تفریق کړو نو له مجهولونو څخه یو مجهول افنا یا له منځه لاړ شي، لکه د x مجهول وغواړو، چې افنا یې کړو د لومړۍ معادلې دواړه خواوې د دویمې معادلې د x په ضریب یعنې (5) کې ضربوو او د دویمې معادلې دواړه خواوې د لومړۍ معادلې د x په ضریب یعنې (7) کې ضربوو.

$$\begin{cases} 7x+5y=205 & \Rightarrow \quad 35x+25y=205 \\ 5x-2y=7 & \Rightarrow \quad 35x-14y=49 \end{cases}$$

په لاس راغلې معادلې چې په هغه کې د x ضریبونه مساوي دي یو له بل څخه تفریقوو.

$$\begin{array}{r} 35x+25y=\ 205 \\ 35x-\ \ 2y=\ \ 49 \\ -\quad\ +\qquad - \\ \hline 39y=156 \end{array} \quad \Rightarrow y=\frac{156}{39} \Rightarrow y=4$$

د y په لاس راغلي قیمت د سیستم په یوه معادله کې وضع کوو تر څو د بل مجهول قیمت په لاس راشي.

$$5x-2y=7$$
$$5x-2(4)=7 \Rightarrow 5x=15 \Rightarrow x=3$$

دویم مثال: د معادلو لاندې سیستم د افنا په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases}3x+2y=4\\2x-3y=-1\end{cases}$$

حل: لومړی یو مجهول له منځه وړو لکه y نو لومړی معادله په 3- کې او دویمه معادله په 3- کې ضربوو په لاس راغلي معادلې خواپخوا سره جمع کوو:

$$\begin{aligned}3x+2y&=4 &\Rightarrow -9x-6y&=-12\\2x-3y&=-1 &\Rightarrow \underline{\ 4x\mp 6y=\mp 2\ }&\\ & & -13x+0&=-10\\ & & x&=\frac{10}{13}\end{aligned}$$

$$3\left(\frac{10}{13}\right)+2y=4 \Rightarrow \frac{30}{13}+2y=4$$
$$2y=4-\frac{30}{13} \Rightarrow 2y=\frac{52-30}{13}$$
$$2y=\frac{22}{13} \Rightarrow y=\frac{11}{13}$$

د دوه مجهوله معادلو د سیستم حل د افنا په طریقه کې په لاندې ډول عمل کوو.

- هر مجهول چې وغواړو هغه افنا کړو د هغې ضریبونه په پام کې نیسو. لومړی معادله د دویمې معادلې د افنا شوی مجهول په ضریب کې او دویمه معادله د لومړی معادلې د افنا شوی مجهول په ضریب کې ضربوو.
- په لاس راغلی معادلې یوه له بلې څخه تفریق یا جمع کوو چې د یوه مجهول قیمت په لاس راځي دا په لاس راغلي قیمت د سیستم په یوه معادله کې وضع کوو چې د بل مجهول قیمت په لاس راځي.

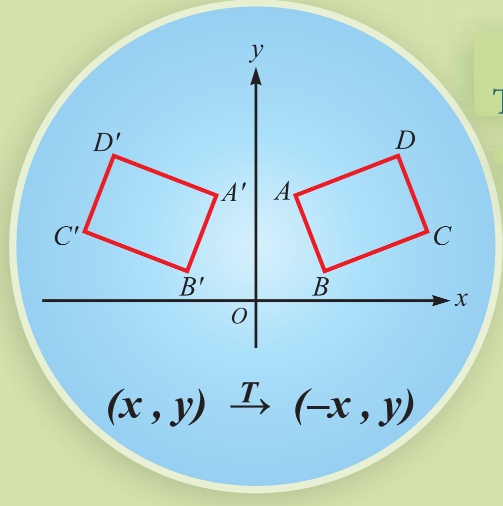
پوښتنې

د معادلو لاندې سیستم د افنا په طریقه حل کړئ.

1) $\begin{cases}x+y=3\\2x-y=10\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+y=-39\\x-y=9\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x+2y=2\\x-4y=1\end{cases}$

4) $\begin{cases}\frac{2}{x}-\frac{5}{y}=5\\\frac{3}{x}+\frac{10}{y}=18\end{cases}$ 5) $\begin{cases}y+x-1=0\\2x+y-9=0\end{cases}$ 6) $\begin{cases}10x+3y=26\\8x+3y=18\end{cases}$

د ځای بدلون (تغیرمکان)
Transformation



په مخامخ شکل کې څه ګورئ او څه یووالی وینئ؟

فعالیت

په مخامخ شکل کې څه ګورئ او څه یووالی وینئ

- د $A(1,2)$، $B(-2,3)$ او $C(2,-4)$ ټکي د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.
- دغو ټکو د x په مختصه باندې ۲ واحد ورزیات کړئ.
- په لاس راغلي ټکي د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وښیئ.

په پورتني فعالیت کې ولیدل شول چې هراختیاري ټکی (x, y) په یوه مستوي کې کولای شو د $(x+2, y)$ ټکي ته په دې ډول بدلون ورکړو، په دې حالت کې ویلای شو چې په لاس راغلي ټکي د راکړل شوي ټکي خیري یا تصویر د $(x+2, y)$ تر بدلون لاندې دي، هغه اړیکه چې د مستوي د هر ټکي د وضعیه کمیاتو په مستوي کې یوازې او یوازې یوه نوي ټکي ته نسبت ورکړي په مستوي کې د ځای یا ټکي بدلون بلل کیږي.

لومړی مثال: د $D(1,2)$، $E(4,1)$ او $C(2,4)$ ټکو خیري یا تصویر د لاندې بدلونو په اساس د وضعیه کمیاتو په مستوي کې په لاس راوړئ.

$a:\ (x,y)\xrightarrow{T_1}(-x,y)$ $\qquad b:\ (x,y)\xrightarrow{T_2}(x,-y)$

$c:\ (x,y)\xrightarrow{T_3}(y,x)$ $\qquad d:\ (x,y)\xrightarrow{T_4}(x+2,y+3)$

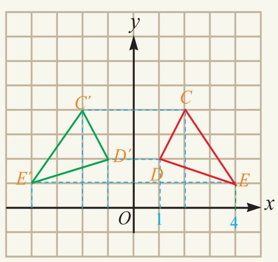
حل: لومړی راکړل شوي ټکي د وضعیه کمیاتو په سیستم کې ټاکو.

a: د $(x,y)\xrightarrow{T_1}(-x,y)$ تربدلوني لاندې لرو چې:

$T(4,1)=(-4,1)$

$T(1,2)=(-1,2)$

$T(2,4)=(-2,4)$

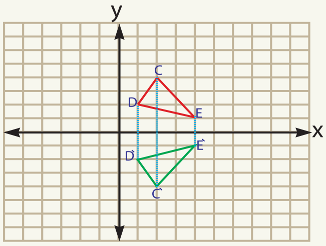


b: د $(x,y)\xrightarrow{T_2}(x,-y)$ تربدلون لاندې لرو چې:

$R(4,1)=(4,-1)$

$R(1,2)=(1,-2)$

$R(2,4)=(2,-4)$



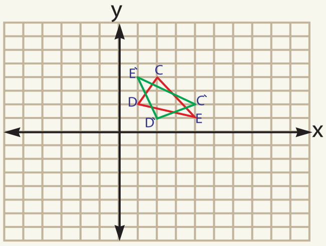
c د $(x,y)\xrightarrow{T_3}(y,x)$ تربدلون لاندې لرو چې:

(1,4)

$M(4,1)=(1,4)$

$M(1,2)=(2,1)$

$M(2,4)=(4,2)$

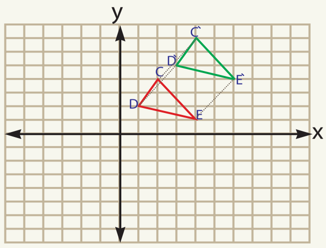


d: د $(x,y)\xrightarrow{T_4}(x+2,y+3)$ تربدلون لاندې لرو چې:

$S(4,1)=(6,4)$

$S(1,2)=(3,5)$

$S(2,4)=(4,7)$



په پورتنیو مثالونوکې ښودلای شوچې د ورکړل شویو بدلونونو د ټکو فاصله توپیرنه کوي.
د مثال په ډول که $T(c)=c'$ او $T(E)=E'$ وي نو $EC=E'C'$ ده.
هغه بدلونونه چې د ټکوترمنځ واټن(فاصله) ساتی، ایزومتری (*Isometry*)، بلل کیږي.
که یوشکل دایزومتری په ډول، خپل ځای بدل کړي نو د اصل شیرې یا شکل سره انطباق منونکي دي.

پوښتنې

1- د $(1,-1),(-2,-2),(-3,1)$ او $(3,3)$ ټکو تصویر د لاندې بدلونو په اساس د وضیعه

1- د $(1,-1),(-2,-2),(-3,1)$ او $(3,3)$ ټکو تصویر د لاندې بدلونونو په اساس د وضیعه کمیاتو په سیستم کې په لاس راوړئ.

a: $(x,y)\xrightarrow{T}(x-1,y+2)$

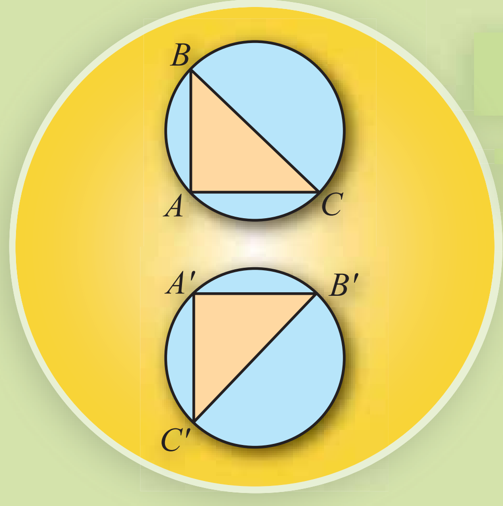
b: $(x,y)\xrightarrow{D}(2x,y)$

c: $(x,y)\xrightarrow{K}(x+5,0)$

d: $(x,y)\xrightarrow{R}(0,y-2)$

e: $(x,y)\xrightarrow{P}(3x-1\,,\,y+2)$

انتقال
Translation



په مخامخ شکل کې د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث چې په مستوي کې یې له لومړي حالته دوم حالت $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ غوره کړی دی، تاسوکولای شئ چې ددې حرکت د ځای بدلون شرح کړئ.

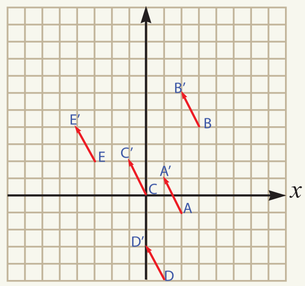
فعالیت

- د وضیعه کمیاتو په مستوئ کې د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث رسم او مختصات یې ولیکئ.
- د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث راسونه د محور په مثبت جهت د (2) واحد په اندازه او د y محور په مثبت جهت د (1) واحد په اندازه حرکت ورکړئ نوبوحاصل شوو ټکوته B', A' او C' ووایئ.
- د B', A' او C' ټکي یو له بل سره وترئ او د $\overset{\Delta}{ABC}$ او $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ مثلثونه د اضلاعو د اوږدوالي اوظاهري شکل له مخې پرتله کړئ.

که چیرې د یوه شکل یاخیرې ټول ټکي په یوه ټاکلې جهت(لوری) او یو واټن(فاصل) حرکت ورکړو په لاس راغلی شکل له لومړي شکل سره انطباق منونکي دي، دې حرکت ته انتقال وایي او هغه په دې ډول ښودل کېږي: $T(x, y) = (x + h, y + K)$
په داسې حال کې چې h او k حقیقي عددونه دي.

لومړی مثال: د $A(2,-1), B(3,4), C(0,0), D(1,-5)$ او $E(-3,2)$ ټکي د وضیعه کمیاتو په سیستم کې د $T(x, y) = (x-1, y+2)$ انتقالي رابطې په اساس وښیئ.

حل: لومړی راکړل شوي ټکي د وضیعه کمیاتو په سیستم کې وښیئ اوبیا هغه ټکي چې د $T(x, y) = (x-1, y+2)$ اړیکې څخه لاسته راځي په لاس راوړئ.



$A(2,-1), T_A(2-1,-1+2)=(1,1)$
$B(3\ ,\ 4), T_B(3-1\ ,\ 4+2)=(2,6)$
$C(0\ ,\ 0), T_C(0-1\ ,\ 0+2)=(-1,2)$
$D(1\ ,-5), T_D(1-1\ ,-5+2)=(0,\ -3)$
$E(-3\ ,2), T_E(-3-1\ ,2+2)=(-4,\ 4)$

په پورتني مثال کې د ټکو د ترلوځخه د شکل څيره لاسته راځي ليدل کيږي چې د $\overline{AA'}$، $\overline{BB'}$، $\overline{CC'}$، $\overline{DD'}$ او $\overline{EE'}$ يو له بل سره موازي او مساوي دي.

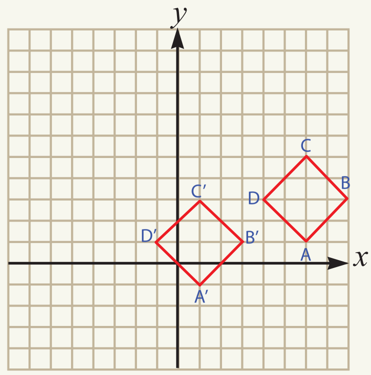
دويم مثال: که چيرې $A(6,1)$، $B(8,3)$، $C(6,5)$ او $D(4,3)$ د يوې مربع راسونه وي هغه د وضعيه کمياتو په سيستم کې ترديې $T(x,y)=(x-5,y-2)$ اريکه لاندې رسم کړئ.

الف: د مربع د اضلاعګانو اوږدوالی اوتصوير نظر يوبل ته پرتله کړئ.

ب: د مربع د اضلاعګانو ميل اوڅيره يې نظر يوبل ته پرتله کړئ.

حل: د ABCD منطقه مربع ترانتقال لاندې د $\boxed{A'B'C'D'}$ څلور ضلعي ده.

$A(6,1), T_A=(6-5\ ,1-2)\quad \Rightarrow A'=(1,-1)$
$B(8,3), T_B=(8-5\ ,3-2)\quad \Rightarrow B'=(3,1)$
$C(6,5), T_C=(6-5,5-2)\quad \Rightarrow C'=(1,3)$
$D(4,3), T_D=(4-5,3-2)\quad \Rightarrow D'=(-1,1)$



د (الف) او (ب) جزونو د شاګردانوکورنی دنده ده.

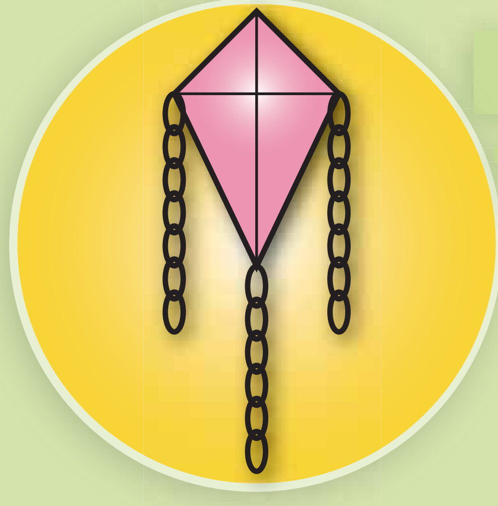
انتقال يو ايزومتري رابطه ده.

پوښتني

1- که د $M(1,-1)$، $N(2,-5)$، $O(2,5)$ او $P(3,3)$ يوه څلور ضلعي وي څلور ضلعي او د هغې تصوير تر دې رابطې $T(x,y)=(x+9,-y)$ لاندې رسم کړئ.

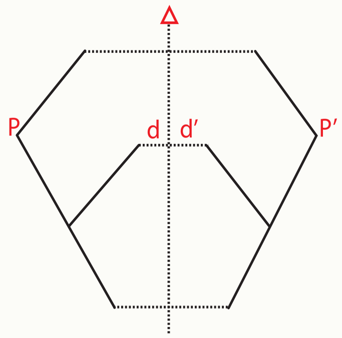
۲- که $L(7,0)$، $I(5,0)$ او $O(5,3)$ د يوه مثلث راسونه وي مثلث او د هغې تصوير ياڅيره د $F(x,y)=(-y+3,x-3)$ بدلون په اساس رسم کړئ.

انعکاس
Reflection



د پتنگ(کاغذ پران) خیري ته پاملرنه وکړئ، ستاسو په نظر دا کاغذپران(پتنګ نسبت کوم يوه قطر ته متناظردی.

فعالیت



- د یوې صفحې په نمایي کې یوشکل رسم کړئ.
- د شکل ټولې کرښې په داسې رنګ رسم کړئ، چې په کاغذ کې ژر جذب نه شي.
- کاغذ په منځ داسې قات کړئ چې د قات شوي لیکې یوې خوا ته شکل پروت وي.
- صفحه خلاصه کړئ، ووایئ چې کوم شکل د اصلي شکل مخامخ پروت او د دوی ترمنځ څه توپیر دی.

تعریف

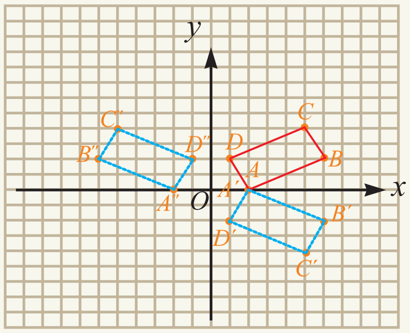
که چیرې د P شکل یا خیرې هر ټکی د p' شکل یاخیرې په هر ټکی داسې بدل شی چې د P شکل یاخیرې د هر ټکي فاصله نظر Δ محورته د p' د شکل د هر ټکی فاصله سره مساوي وي، دې تبدیل ته نظر Δ محورته انعکاس وایې او Δ محور ته د انعکاس محوروایې.

لومړی مثال: که چیرې د A(2,0), B(6,2), C(5,4) او D(1,2) ټکي د یوه مستطیل راسونه وي د وضیعه کمیاتو په سیستم کې مستطیل رسم خیره او تصویر يې نظر x او y محورته رسم کړئ.

حل: که چیرې د $\overline{ABCD}$ مستطیل خیره نظرد y محور ته رسم کړو په دې حالت کې یوازې د x مختصه یې په $(-x)$ بدلیږي او که چیرې خیره یا تصویر یې نسبت x محورته رسم کړو

يوازې د y مختصه يې په $(-y)$ بدليږي خرنګه چې په شکل کې ليدل کيږي.

نظر y محور ته انعکاس $(-x , y)$	نظر x محورته انعکاس $(x , -y)$	ټکی (x , y)
$A''(-2 , 0)$	$A'(2 , 0)$	$A(2 , 0)$
$B''(-6 , 2)$	$B'(6 , -2)$	$B(6 , 2)$
$C''(-5 , 4)$	$C'(5 , -4)$	$C(5 , 4)$
$D''(-1 , 2)$	$D'(1 , -2)$	$D(1 , 2)$



د $T(x, y) = (-x, y)$ ليږدونه نسبت y محورته يو انعکاس دی.

د $T(x, y) = (x, -y)$ ليږدونه نسبت x محورته يو انعکاس دی.

د $T(x, y) = (x, y)$ ليږدونه نسبت $y = x$ مستقيم ته يو انعکاس دی.

پوښتنې

1- که $C(3,1)$ او $B(7,1), (A(3,1)$ د يوه مثلث راسونه وي، مثلث او د هغې تصوير ياخيره د لاندې ورکړل شويو د انعکاس اړيکو په اساس رسم کړئ

$a: R_1(x, y) = (-x, y)$ $\quad$ $b: R_2(x, y) = (x, -y)$

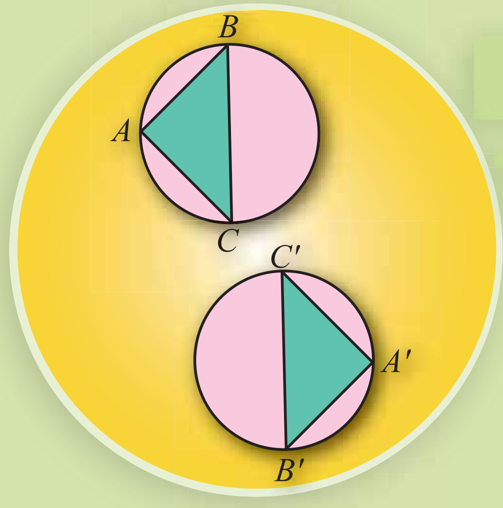
$c: R_3(x, y) = (y, x)$ $\quad$ $d: R_4(x, y) = (-y, -x)$

2- که چيرې $C(-3,-5), (B(-5,0), A(0,2)$ او $D(2,-3)$ د يوې مربع راسونه وي مربع او د هغې تصوير د $R(x, y) = (-x, -y)$ انعکاس اړيکې په اساس رسم کړئ.

۳- د $(A(1,4)$, $B(3,-2)$ او $C(5,1)$ ديوه مثلث راسونه وي، د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث تصويرياخيره تر انعکاس لاندې نسب لاندې کرښو ته:

- $x + 2 = 0$ رسم کړئ او په $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ يې ونوموئ.
- $y + 3 = 0$ رسم کړئ او په $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ يې ونوموئ.

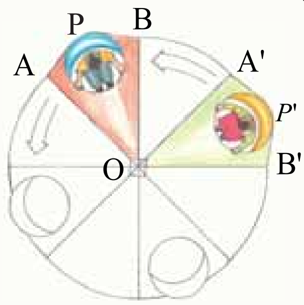
دوران
Rotations



په مخامخ شــکل کې د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث په مســتوي کې حرکت کړی او د $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ نوی ځای يې نيولی دی تاسې کولای شئ د دې ډول بدلون حرکت شرح کړئ.

فعاليت

مخامخ مدل د ماشومانو د لوبو د خرخ دوه بېلابېل ځايونه راښيي.



- د شکل څخه ليدل کېږي چې 'A د A ټکی متناظر او 'B د B ټکی متناظر دی د $A\hat{O}A'$ او $B\hat{O}B'$ زاويې اندازه کړئ او يوه له بلې سره يې پرتله کړئ.
- اوس د خرخ د چوکۍ په لومړي ځای يوټکی وټاکئ اوهغه په P ونوموئ.
- د P ټکی متناظر ټکی د خوکې په دويم ځای کې پيدا کړئ او هغه 'p ونوموئ.
- د $P\hat{O}P'$ زاويه اندازه کړئ.

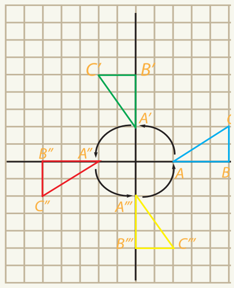
د پورتنی فعاليت په پام کې نيولو سره دوران په مستوي کې د ليردوني په عنوان داسې تعريفوو:

که يوشکل په يوه مستوي کې د يوټاکلي ټکي په شاوخوا د $\hat{\alpha}$ زاويې په اندازه دواران وکړي ټول ټکي يې د $\hat{\alpha}$ زاويې په اندازه دوران کوي په دې حالت کې د O ثابت ټکی د دوران مرکز او د $\hat{\alpha}$ ثابته زاويې ته د دوران زاويه وايي.

مثال: د A(2,0), B(5,0) او $C(5,2)$ د يوه مثلث راسونه دي د وضعيه کمياتو په مستوي کې د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث او د هغه خيره ياتصوير د لاندې د تبديل د ورکړ شويو اريکو په اساس رسم او بيا هريو بدلون شرح کړئ.

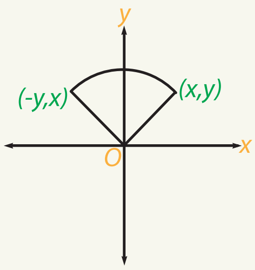
الف: $R_1(x,y)=(-y,x)$ ب: $R_2(x,y)=(-x,-y)$ ج: $R_3(x,y)=(y,-x)$

حل:

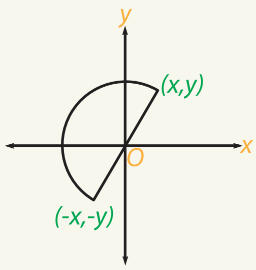


تکی	خیره(تصویر)		
(x,y)	$(-y,x)$	$(-x,-y)$	$(y,-x)$
$A(2,0)$	$A'(0,2)$	$A''(-2,0)$	$A'''(0,-2)$
$B(5,0)$	$B'(0,5)$	$B''(-5,0)$	$B'''(0,-5)$
$C(5,2)$	$C'(-2,5)$	$C''(-5,-2)$	$C'''(2,-5)$

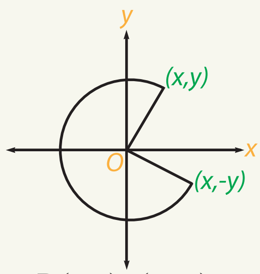
د شکل شخه لیدل کېږي چې د R_1, R_2 او R_3 بدلونونه د وضعیه کمیاتو د مبدأ په مرکز دورانونه په ترتیب د $90°, 180°$ او $270°$ زاویوسره دي.



$R(x,y)=(-y,x)$
(0,0) د دوران مرکز
$90°$ د دوران زاویه



$R(x,y)=(-x,-y)$
(0,0) د دوران مرکز
$180°$ د دوران زاویه



$R(x,y)=(x,-y)$
(0,0) د دوران مرکز
$270°$ د دوران زاویه

پوښتنې

1- که $A(0,0)$ $B(6,-2)$ او $C(7,1)$ د یوه مثلث راسونه وي.

الف: د $R(x,y)=(-y,x)$ ترتبدیل لاندې د ABC مثلث شکل اوتصویر رسم کړئ.

ب: د مثلث د اضلاعگانو اوږدوالی د هغه له تصویر یا خیرې سره پرتله کړئ. ایا دا دوران یو ایزومتري دی؟

2- که $(A(-1,-2)$, $B(7,2)$, $C(5,6)$ او $D(-3,2)$ د یو مستطیل راسونه وي.

الف: $R(x,y)=(-y,-x)$ تر دوران لاندې مستطیل او د هغه تصویریا خیره رسم کړئ.

ب: د مستطیل د اضلاع گانو اوږدوالی اومساحت د هغه له تصویر یاخیرې سره پرتله کړئ.

د درېیم څپرکي لنډیز

- په یوه مستوي کې چې دوه افقي اوعمودي محوروونه یوبل عموداً پرې کړي د وضیعه کمیاتو د سیستم په نامه یادیږي.
- د وضیعه کمیاتو په سیستم کې افقي محورته د فاصلې یا واټن محور اوعمودي محورته د ترتیب محور اود پریکړې ټکي ته یې مبدا وایي.
- د A او B دوو ټکوترمنځ واټن د $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ اړیکې څخه لاسته راځي.
- د یوې کرښې د منځ ټکی مختصات د $M(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$ څخه لاسته راځي.
- هغه کرښه چې دy مختصه یې صفروي د منځ د ټکی مختصات یې $M(\frac{x_1+x_2}{2},0)$ دی.
- هغه کرښه چې د x مختصه یې صفر وي د منځ د ټکي مختصات یې $M(0,\frac{y_1+y_2}{2})$

د هرې مستقیمې کرښې میل د $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ رابطې څخه لاسته راځي.
- د هر مستقیم خط میل په هغه زاویه پورې اړه لري چې مستقیم یې د x محور له مثبت جهت سره جوړه وي.
- هر مستقیم چې د x محور د مثبت جهت سره حاده زاویه جوړه کړي میل یې مثبت او که منفرجه زاویه جوړه کړي میل یې منفي دی.
- موازي مستقیمونه د مساوي میلونو لرونکي دي.
- هر مستقیم خط چې له x محور سره موازي وي میل یې صفر او هر مستقیم خط چې پر x محور عمود وي میل نه دی تعریف شوی.
- دوه مستقیم خطونه هغه وخت یو پربل عمود دي چې د میلونو د ضرب حاصل یې (-1) وي.
- درې ټکي هغه وخت په یوې کرښې پراته دي چې د هر قطعه خط میلونه یې سره مساوي وي.
- د وضیعه کمیاتو په مستوي کې د یوه ټکي هغه اړیکه چې یوازې او یوازې یوه نوي ټکي ته نسبت ورکړي یوه لیږدونه یاتغیر مکان بلل کیږي.
- که چیرې د یوه شکل ټولو ټکو ته په یوه ټاکلي جهت او یوه فاصله حرکت ورکړو په لاس راغلی شکل د لومړي شکل سره انطباق منونکی دی او دې حرکت ته انتقال وایی.
- که یوشکل په یوه مستوي کې د یو ټاکلی ټکي په شاوخواد $\hat{\alpha}$ زاویې په اندازه دوران وکړي

د دريم څپرکي پوښتنې

ټول ټکي يې په عين زاويه دوران کوي دې حرکت ته دوران وايي.

- په لاندې سوالونوکې هر سوال ته څلورځوابونه ورکړ شوي دي صحيح ځواب وټاکئ.

1- د دوو عمودي کرښو د ميلونو د ضرب حاصل:

a) (1) دی. b) صفر دی. c) ∞ دی. d)منفي يو دی.

2- د مستقيمي کرښې معادله چې د y محور سره يې د پرېکړې ټکی او ميل يې ښکاره وي عبارت له:

a) $y = mx + c$ b) $y = b$ c) $y = mx + b$ d) $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

3- د هغه کرښې معادله چې دوه ټکي يې ښکاره وي عبارت له:

a) $y = mx + b$ b) $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ c) $\dfrac{y_2 - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y - y_1}{x_2 - x_1}$ d) $y = mx$

4- د $A(0, y_1)$ او $B(0, y_2)$ دوو ټکو د منځنی ټکی مختصات عبارت له:

a) $M(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, 0)$ b) $M(\dfrac{y_2 + y_1}{2}, 0)$ c) $M(0, \dfrac{y_1 + y_2}{2})$ d) $M(0,0)$

٥- د $A(x_1,0)$ او $B(x_2,0)$ دووټکو د منځنی ټکی مختصات عبارت له :

a) $M(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, 0)$ b) $M(\dfrac{y_2 + y_1}{2}, 0)$ c) $M(0, \dfrac{y_1 + y_2}{2})$ d) $M(0,0)$

6- د A او B دوو ټکو ترمنځ واټن عبارت دی له:

a) $AB = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$ b) $AB = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - (y_1 + y_2)^2}$

c) $AB = \sqrt{(x_2 + y_2)^2 + (x_2 - y_1)^2}$ d) $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

7- د يوه ټکي او د وضيعه کمياتو د مبدآ ترمنځ واټن يافاصله عبارت ده له:

a) $AB = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ b) $AB = \sqrt{y_1^2 + y_1^2}$

c) $AB = \sqrt{x^2 + y^2}$ d) $AB = \sqrt{x^2 - y^2}$

8- د يو مستقيمې کرښې ميل عبارت له:

a) $m = \dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ b) $m = \dfrac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1}$ c) $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ d) $m = \dfrac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}$

9- دوه مستقيمونه هغه وخت يو له بل سره موازي وي چې:

a: د هغو ميلونه سره مساوي وي. b: ميلونه ئې مساوي نه وی.

c: د میلونو د ضرب حاصل یې منفي یو وي. d: ټول ځوابونه سم دی.

- خالي ځایونه په مناسبوکلماتو ډک کړئ.

۱- د وضیعه کمیاتو په سیستم کې د x محورته د .... او محورته د .... وایي.

۲- په دویمه ناحیه کې هغه ټکي پراته دي چې x یې .... او y یې .... دی.

۳- په دریمه ناحیه کې هغه ټکي پراته دي چې x او y دواړه .... دی.

٤- هغه مستقیم چې د x محور د مثبت جهت سره مساوي حاده زاویه جوړه کړي میل یې .... دی.

٥- دوه موازي مستقیمې کرښې چې د x محورد مثبت جهت سره مساوي .... جوړه وي.

٦- د x محورسره د هر موازي مستقیم میل .... دی.

٧- درې ټکي هغه وخت په یوه مستقیمه کرښه پراته وي چې د ټوټه کرښو .... سره مساوي وي.

٨- که د دووکرښو میلونه یوبل سره مساوي نه وي دا کرښې .... دی.

- لاندې جملې کومې سمې اوکومې یې ناسمې دي د سموپه مخ کې د(س) توري اود ناسمې په مخ کې د(ن) توري ولیکئ.

1- ( ) که د وضیعه کمیاتو په مستوي کې د هر ټکی لپاره یوازې او یوازې یوه نوي ټکي ته نسبت ورکړئ په مستوي کې بدلون بلل کیږي.

2- ( ) که د p شکل هر ټکی د P' شکل په یوه ټکي داسې تبدیل شي چې د p د شکل د هر ټکی واټن نظر یوه محورته د P' د شکل له هر ټکي سره مساوي وي دې بدلون ته انعکاس وایي.

3- ( ) د $T(x,y)=(-x,y)$ بدلون نسبت y محورته یوانعکاس دی.

4- ( ) د $T(x,y)=(x,-y)$ بدلون نسبت x محورته یو انعکاس دی.

5- ( ) د $T(x,y)=(y,x)$ بدلون نسبت $y=x$ مستقیم ته یوانعکاس دی.

6- ( ) انتقال هغه تغیرمکان یالیږدونه دی چې په هغه کې د واټونو یا فاصلو جهت اود زاویو پراخوالی ثابت پاتې شي.

7- ( ) که په مستوي کې یوشکل(O) ټاکلي ټکي په شاوخوا د $\hat{\alpha}$ زاویې په اندازه دوران وکړي د هغې ټول ټکي په عین زاویه دوارن کوي.

• لاندې سوالونه حل کړئ

1- لاندې ټکي چې وضعيه کميات يې ورکړ شوی دی د وضعيه کمياتو په سيستم کې وټاکئ.

$1:\ (0,1)\qquad 2:\ (2,3)\qquad 3:\ (0,-4)\qquad 4:\ (5,0)$

2- د لاندې ټکو د جوړو ترمنځ واټن چې وضيعه کميات يې ورکړی شوی ښکاره کړئ.

$1:\ (0,9),(-5,4)\qquad 2:\ (4,1),(3,-2)\qquad 3:\ (-7,4),(1,-11)$

3-وښيئ چې لاندې ټکي د يوه قايم الزاويه مثلث راسونه دي او هم د مثلث مساحت پيدا کړئ.

$1:\ (0,9)\ ,\ (-4,-1)\ ,\ (3,2)\qquad 2:\ (3,-2)\ ,\ (-2,3)\ ,\ (4,-4)$

4-وښيئ چې لاندې ورکړی شوی ټکي په يوه مستقيمه کرښه دپاسه پراته دي.

$1:\ (0,4)\ ,\ (3,-2)\ ,\ (-2,8)\qquad 2:\ (1,2)\ ,\ (-3,10)\ ,\ (4,-4)$

5-د يوې مستقيمې کرښې ميل اويو ټکی په لاندې ډول ورکړل شوی د هغې معادله په لاس راوړئ.

$1:\ (2,3)\ ,\ m=-\frac{1}{2}\qquad 2:\ (-4,1)\ ,\ m=-\frac{2}{3}\qquad 3:\ (-1,-4)\ ,\ m=-2$

6- که د يوه مستطيل راسونه $(-3,1)$, $(-1,3)$, $(3,-1)$ او $(1,-3)$ وي مساحت يې پيدا کړئ.

7- که د يوه متوازي الضلاع راسونه $(2,4)$, $(5,9)$, $(4,9)$ او $(1,4)$ وي د قطرونو اوږدوالی يې پيدا کړئ.

8- وښيئ چې د $(-3,1)$, $(-9,4)$, $(12,0)$ او $(6,3)$ د يوه متوازي الضلاع راسونه دي.

9- که $(5,0)$, $(-3,2)$ او $(1,-3)$ د يوه مثلث راسونه وي د اضلاعګانو د منځنی ټکي کميات وضيعه په لاس راوړئ.

10- ثبوت کړئ:

الف: چې د مربع قطرونه يو پربل عمود دي.

ب: چې د مستطيل قطرونه يوبل نيمايي کوي.

11- هغه مستقيم چې د $A(3,-1)$ او $B(5,3)$ ټکوڅخه تيريږی د وسطي عمود معادله يې پيدا کړئ.

12- د هغه مستقيم معادله پيدا کړئ چې $P(4,5)$ ټکي څخه تير شي او په ترتيب سره د x او y له محورونو سره موازي وي.

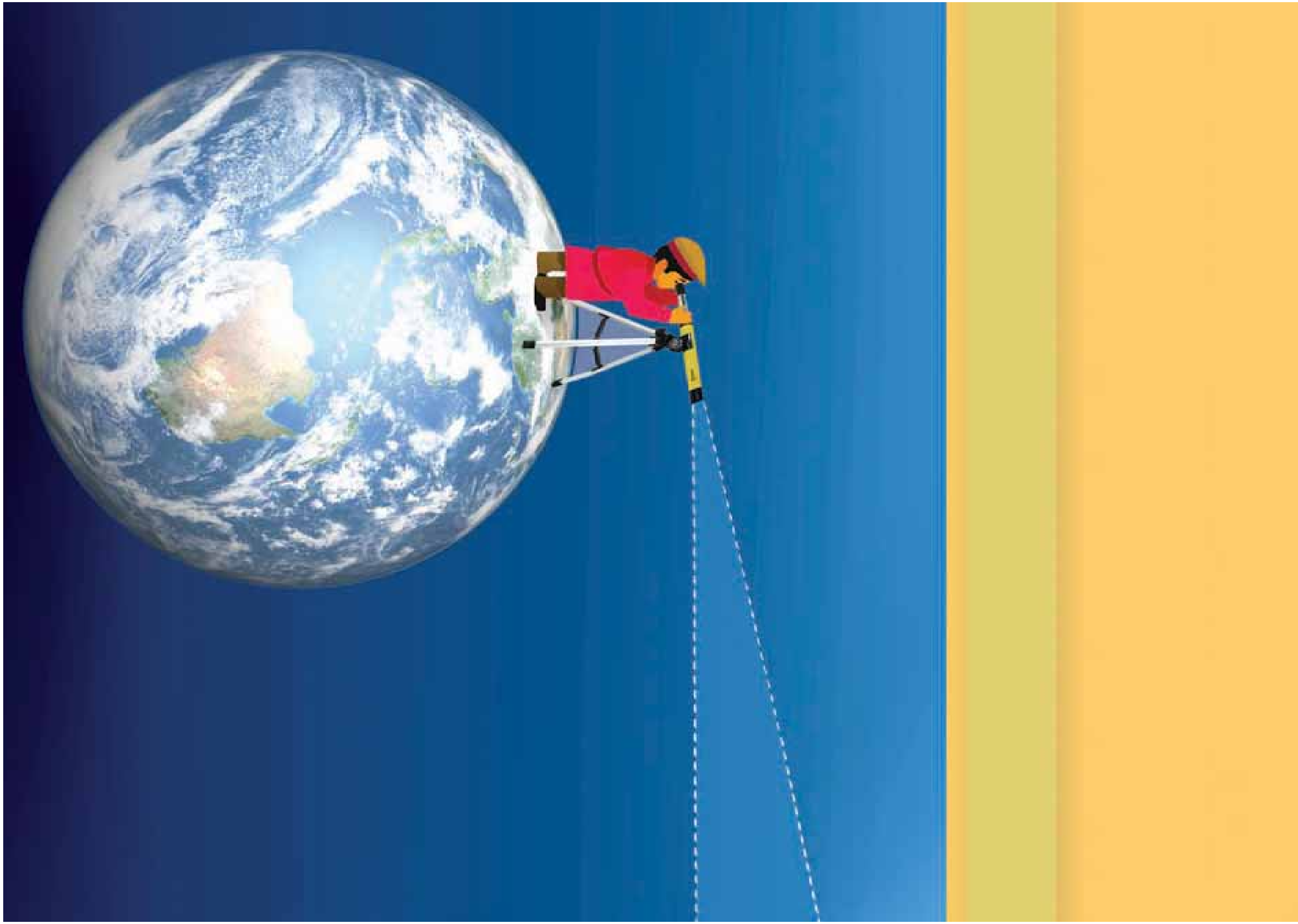
13- که چيرې $A(5,0)$, $B(7,0)$ او $C(5,3)$ د يوه مثلث راسونه وي.

الف: د $T(x,y)=(-y+3,x-3)$ ترتيب لاندې مثلث او د هغه تصوير ياڅيره رسم کړئ.

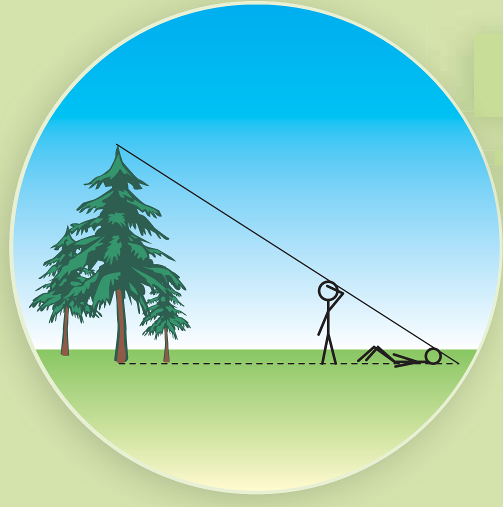
ب: د ABC مثلث تصوير د $R(x,y)=(-y,x)$ تر دوران لاندې پيدا کړئ او هغه ته $A'B'C'$ ووايئ وروسته د $T(x,y)=(x+3,y-3)$ تصوير يا څيره د ترانتقال ياليږدونې لاندې وټاکئ.

څلورم څپرکی

مثلثات



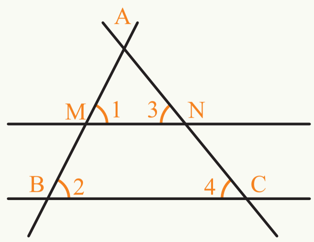
په مثلث کې د تالس قضیه



دوه زده کوونکي يو له بل سره خبرې کوي چې د يوې ونې جګ والي څنګه اندازه کړي يو بل ته داسې وړانديز وکړ او په خپله په ځمکه اوږد پريوت، هغه له خپل ملګري څخه وغوښتل چې دومره حرکت وکړي چې د ده سر او د ونې څوکه په يوه مستقيمه کرښه سره ووينې. د زده کوونکي د وړانديز په سموالي سوچ وکړئ.

فعاليت

• د $\overset{\Delta}{ABC}$ په مثلث کې $\overline{MN} // \overline{BC}$ دی. د هر ټوټه کرښې اندازه په تش ځايونو کې وليکئ.



$\frac{\overline{MN}}{\overline{BC}} = \frac{\square}{\square}$ $\quad \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \frac{\square}{\square}$ $\quad \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\square}{\square}$

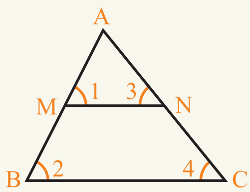
• هغه زاويې چې يو له بل سره مساوي دي وښيئ.

• د $\frac{MN}{BC}$, $\frac{AN}{AC}$ او $\frac{AM}{AB}$ نسبتونه پيدا او يو له بل سره څه اړيکه لري؟

د پورتني فعاليت څخه د تالس قضيه داسې بيانوو؟

قضيه: که د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث په يوې ضلعې يا ځنډې موازي کرښه رسم کړو د تشکيل شوي مثلث د اضلاعو نسبت د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث پر اضلاعو يو له بل سره مساوي دي. دا قضيه په مثلث کې د تالس قضيې په نامه ياديږي.

ثبوت: څرنګه چې د $\overset{\Delta}{ABC}$ په مثلث کې $\overline{MN} // \overline{BC}$ دي نو کولای شو وليکو چې:



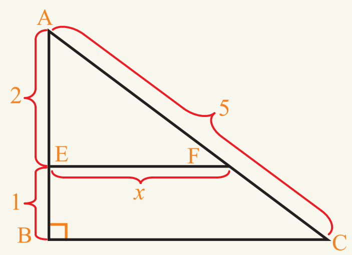
$\hat{1} = \hat{2}$....... متوافقه
$\hat{3} = \hat{4}$....... متوافقه
$\hat{A} = \hat{A}$..... مشترک

$\Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AMN}$

$\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

لومړی مثال: د $\overset{\Delta}{ABC}$ په قایم الزاویه مثلث کې چې $\overline{EF}$ له $\overline{BC}$ سره موازي دي په پام کې ونیسئ د قایمو اضلاعو اود $\overline{EF}$ موازي کرښې اوږدوالی پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې د $\overset{\Delta}{ABC}$ په مثلث کې $\overline{EF}//\overline{BC}$ سره دي نو د تالس د قضیې په اساس دا دوه مثلثونه سره ورته یا متشابه دي نو کولای شو ولیکو چې:



$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{x}{3}$$

$$x=2$$

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}$$

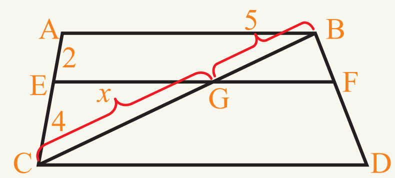
$$AC^2=BC^2+AB^2$$

$$5^2=BC^2+3^2$$

$$BC^2=25-16=9$$

$$\boxed{BC=3}$$

دویم مثال: په لاندې ذوذنقه کې چې $\overline{EF}//\overline{BA}$ دي د x مقدار وټاکئ.



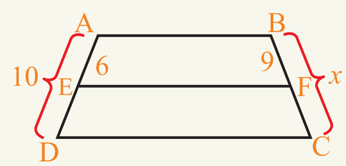
$$\frac{\overline{CG}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{GB}}{\overline{AE}} \quad \text{یا} \quad \frac{\overline{CG}}{\overline{GB}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}$$

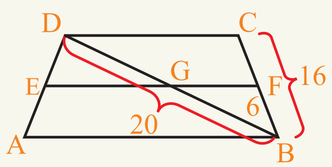
$$\frac{x}{4}=\frac{5}{2} \quad \Rightarrow x=\frac{4\cdot 5}{2}=\frac{20}{2}$$

$$x=10$$

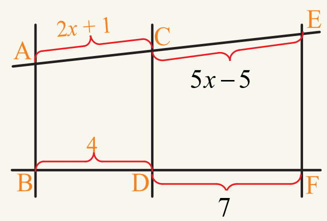
پوښتنې

1- د ذوذنقو په لاندې شکلونو کې د x مقدار وټاکئ.

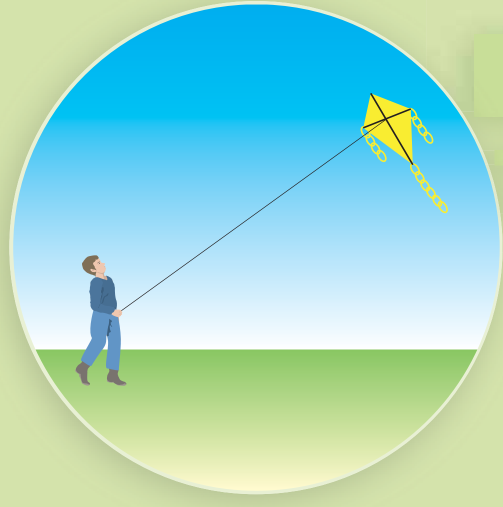




2- په لاندې شکل کې چې $\overline{CD}//\overline{EF}$ او $\overline{AB}//\overline{CD}$ وي د x مقدار وټاکئ.



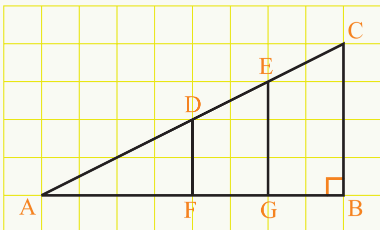
د يوې حاده زاويې ساين



که یو کاغذ پران په هوا کې د الوتلو په حالت کې وي، کولای شئ واتن یې د ځمکې څخه په لاس راوړئ؟

فعالیت

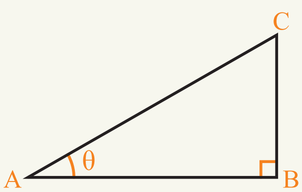
- په قایم الزاویه مثلث کې د $\overline{AC}$ په وتر باندې د D او E ټکي ټاکل شوي دي. د دې ټکو څخه د مثلث په $\overline{BC}$ ضلعه موازي رسم کړئ او د پریکړې ټکي یې په وار سره F او G نوموو.
- د خط کش څخه په ګټه اخیستنه د مثلث اضلاعوې اندازه او د $\frac{DF}{DA} = \frac{EG}{AE}$ او $\frac{BC}{AC}$ نسبتونه محاسبه او پرتله یې کړئ.



- ایا د D او E ټکو د ځای په بدلون سره د $\frac{DF}{DA} = \frac{EG}{AE}$ او $\frac{BC}{AC}$ نسبتونه هم بدلون کوي؟ دیوه ټکي په ټاکلو سره هغه وڅیړئ.
- د AC د ځاي په بدلون د $\hat{A}$ زاویې په مقدار کې بدلون رامنځ ته کېږي.
- اوس $\overline{AC}$ ثابت پریږدئ او د $\hat{A}$ زاویې ته زیاتوالی ورکړئ. سوچ وکړئ چې په پورتنیو مساوي نسبتونو کې څه پېښېږي؟ ویې څېړئ؟

تعریف

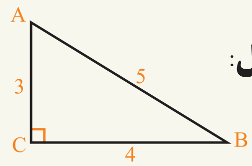
په هر قایم الزاویه مثلث کې د یوې حاده زاویې د مخامخ ضلعې یا ضلعې او پردوالي دوتر پر اوږدوالي تل مساوي له یو ثابت مقدار سره دی چې د حاده زاویې په اندازه پورې اړه لري. دې نسبت ته $Sin\theta$ (د حاده زاویې ساین) ویل کېږي.



$$\sin\theta = \frac{\text{د } \theta \text{ حاده زاويې د مخامخ ضلعې اوږدوالی}}{\text{دوتر اوږدوالی}} = \frac{BC}{AC}$$

لومړی مثال: په لاندې شکل کې $SinA$ او $SinB$ په لاس راوړئ.

حل:

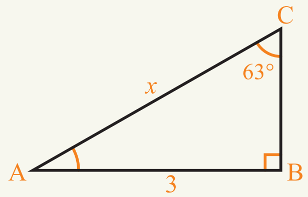


$$\sin A = \frac{\text{د } A \text{ زاويې د مخامخ ضلعې يا ضلعي اوږدوالی}}{\text{دوتر اوږدوالی}} = \frac{\overline{BC}}{AB} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin\hat{A} = 0.8$$

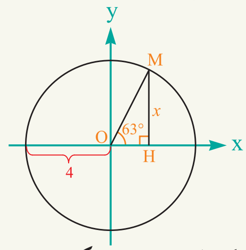
$$\sin B = \frac{\text{د } B \text{ زاويې د مخامخ ضلعې يا ضلعي اوږدوالی}}{\text{دوتر اوږدوالی}} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5} = 0.6$$

دويم مثال: که $Sin63^o$ مساوي په 0,891 وي، په لاندې شکلونو کې د x اندازه پيدا کړئ.

شکل (الف)



شکل (ب)



حل:

د الف جزء: د يوې حادې زاويې د تعريف څخه په ګټه اخيستنه کولای شو وليکو چې:

$$\sin 63^\circ = \frac{AB}{AC}$$

$$0.891 = \frac{3}{x} \Rightarrow x = \frac{3}{0.891} \quad \Rightarrow \quad x \approx 3.37$$

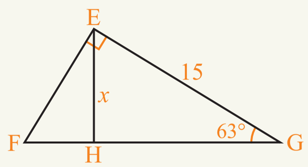
د ب جزء:

$$\sin 63^\circ = \frac{MH}{OM}$$

$$0.891 = \frac{x}{4} \Rightarrow x \approx 3.56$$

پوښتنې

1- که $Sin63^o$ مساوي په 0,891 وي، په مخامخ شکل کې د x عددي قيمت پيدا کړئ.

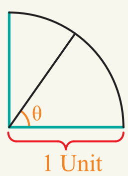


2- د دايرې د څلورمې برخې شکل په پام کې ونيسئ.

الف: که د θ زاويه لويه شي $Sin\theta$ څرنګه بدلون مومي؟

ب: که د θ زاويه صفر ته نږدې شي، $Sin\theta$ کوم عدد ته نږدې کيږي.

ج: که زاويه 90^o ته نږدې شي، $Sin\theta$ کوم عدد ته نږدې کيږي.



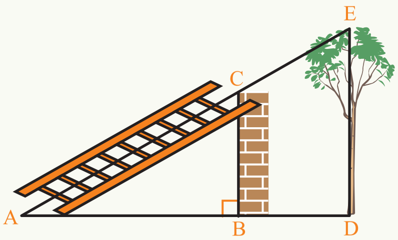
3- د $80^o, 40^o$ او 65^o زاويې په وار سره رسم او بيا په هره زاويه يو قايم الزاويه مثلث کې رسم کړئ د کربښې يا خط کش څخه په ګټه اخيستنه د مثلث اضلاعوي اندازه او $Sin80^o, Sin65^o$ او $Sin40^o$ پيدا کړئ او يو له بل سره يې پرتله کړئ.

4- يو متساوي الساقين مثلث چې قاعده يې 8 واحده او $\hat{B} = 54^\circ$ وي رسم کړئ که يوه څنډه يا ضلعه يې 5 واحده وي د B زاويې Sin ساين پيدا کړئ.

د يوې حاده زاويې کوساين

ديوه ديوال شاته د ناجو يوه ونه ولاړه ده. يو زده کوونکی غواړي و پوهيږي چې ونه له ديواله څومره واټن لري. د دې کار لپاره يې يوازې يوه لنډه زينه درلوده. فکر وکړئ هغه څه سوچ کوئ؟

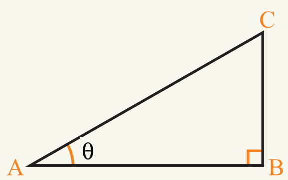
فعاليت



- په مخامخ شکل کې د تشکيل شويو مثلثونو نومونه واخلئ.
- $\overline{BC}$ او $\overline{DE}$ يو له بل سره څه اړيکه لري؟ ولې؟
- د $\overset{\Delta}{ABC}$ او $\overset{\Delta}{ADE}$ مثلثونه يو له بل سره څه اړيکه لري.
- د زينې واټن تر ديوال او بيا يې تر ونې پورې پيدا کړئ.
- د تالس د قضيې په مرسته لاندې مساوات تکميل او د $\overline{AE}$ اوږدوالی په لاس راوړئ.
- دا مقدار په څه پورې تړلی دی. $\frac{AB}{AC}=\frac{....}{AE}$

په عمومي ډول د $\overset{\Delta}{ABC}$ په قايم الزاويه مثلث کې چې يوه حاده زاويه يې θ ده، د دې زاويې د ګاونډي يا مجاورې ضلعې د اوږدوالي او دوتر د اوږدوالي نسبت ته کوساين وايي.

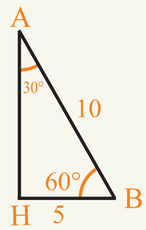
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\text{د } \theta \text{ زاويې د ګاونډي ضلعې اوږدوالی}}{\text{دوتر اوږدوالی}}\ \cos\theta$$



مثال: د AHB په مثلث کې چې $\hat{A}=30^\circ$ او $\hat{B}=60^\circ$ وي وښیئ چې

$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$ او $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$ ، $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ دی.

حل: د فیثاغورث د قضیې څخه په ګټه اخیستنه د AH جګوالی کولای شو ولیکو چې:



$$\overline{AB}^2=\overline{AH}^2+\overline{HB}^2$$

$$10^2=\overline{AH}^2+5^2 \Rightarrow \overline{AH}^2=100-25=75$$

$$\overline{AH}=\sqrt{75} \Rightarrow \overline{AH}=5\sqrt{3}$$

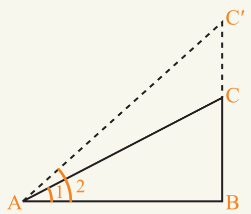
$$\sin 60^\circ=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=\frac{5\sqrt{3}}{10}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \cos 60^\circ=\frac{\overline{BH}}{\overline{AB}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

$$\sin 30^\circ=\frac{\overline{BH}}{\overline{AB}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2} \quad , \quad \cos 30^\circ=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

پوښتنې

1- که یوه حاده زاویه لویه شي، د کوساین په اندازه کې څه بدلون راځي؟ ولې؟
د مخامخ مثلث او مثلثاتي دایرې په مرسته خپل نظر بیان کړئ.

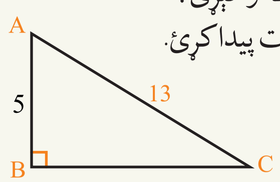
- د $CosA_1$ لپاره یو نسبت ولیکئ.
- د $CosA_2$ لپاره یو نسبت ولیکئ.
- په تشو ځایونو کې مناسبې علامې ولیکئ.



$\overline{AC'}$	☐	$\overline{AC}$
$\cos A_2$	☐	$\cos A_1$

2- د 30^o، 45^o او 60^o زاویو لپاره $Sin^2A+Cos^2A=1$ اریکه وڅیړئ؟

3- په لاندې قایم الزاویه مثلث کې د $SinA$ او $CosA$ عددي قیمت پیدا کړئ.



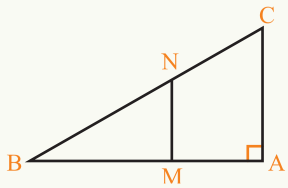
4- د $\overset{\Delta}{ABC}$ په مثلث کې چې د اضلاعو یا څنډو اوږدوالی یې 8,6 او ۱۰ واحده وي د $SinA$ او $CosA$ مثلثاتي نسبتونه محاسبه کړئ.

د حاده زاويې تانجنت

يو زده کوونکی د بيرغ مخکې ولاړ دی.
سوچ کوئ چې د بيرغ د ميلې اوږدوالی څنګه پيداکړئ؟

فعالیت

د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث چې د $\hat{A}$ زاويه يې قايمه ده د $\hat{B}$ زاويې مثلثاتي نسبتونه $(\cos\hat{B}, \sin\hat{B})$ په پام کې ونيسئ چې د $\overline{MN}$ توټه کرښه په $\overline{AC}$ موازي رسم شوې ده.



- د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث په پام کې نيولو سره $\sin\hat{B}$ او $\cos\hat{B}$.

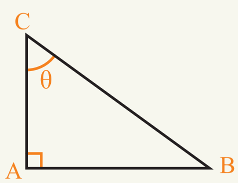
د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث اضلاعو يا د څنډو له مخې وليکئ.

- د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث اضلاعو يا له مخې د $\dfrac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{B}}$ نسبت وليکئ.
- د $\overset{\Delta}{BMN}$ مثلث څخه په ګټه اخيستنه او د اضلاعو يا څنډو له مخې $\dfrac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{B}}$ وليکئ.

د $\overline{MN}, \overline{BC}, \overline{AC}$ او $\overline{BN}$ کرښو د مخامخ اندازه کولو په مرسته پورتني دوه نسبتونه سره پرتله کړئ.

- سوچ وکړئ که چيرې $\dfrac{CosB}{SinB}$ پيداکړو نو دا نسبت د مخامخ څنډو يا اضلاعو د اوږدوالي سره تړاو لري يا يوازې د زاويې په مقدار پورې تړاو لري.

لومړی پايله: په يوه قايم الزاويه مثلث کې د يوې حاده زاويې د مخامخ څنډې يا ضلعې اوږدوالي او د هغه زاويې د ګاونډي ضلعې د اوږدوالي نسبت يو ثابت مقدار دی چې د (د حاده زاويې تانجنت) په نامه ياديږي.



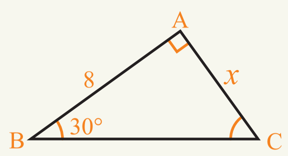
$$\tan\theta = \frac{\overline{AB}\ \text{د}\ \hat{\theta}\ \text{زاويې د مخامخ ضلعې اوږدوالی}}{\overline{AC}\ \text{د}\ \hat{\theta}\ \text{زاويې د ګاونډي ضلعې اوږدوالی}}$$

دویمه پایله: د θ حاده زاویې تانجنت د حاده زاویې ساین پر کوساین له نسبت سره مساوي دی:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

دریمه پایله: $\frac{Cos\theta}{Sin\theta}$ یو بل مقدار دی چې د حاده زاویې کوتانجنت (Cotangentθ) یا د θ زاویې د ګاونډې یا مجاورې ضلعې اوږدوالي د θ زاویې د مخامخ خنډې یا مقابلې ضلعې پر اوږدوالي ته کوتانجنت $Cot\theta$ وایي. دا نسبت د نورو نسبتونو په شان یوازې د زاویې په پراخوالي پورې اړه لري.

لومړی مثال: په لاندې مثلث کې چې $x = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ دی د $\tan 30°$ عددي قیمت په لاس راوړئ.

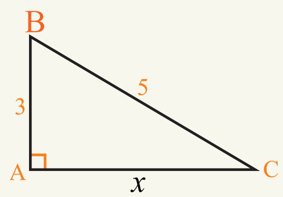


حل: د $\tan\theta$ تعریف څخه په ګټه اخیستنه کولای شو ولیکو چې:

$$\tan 30° = \frac{x}{8} \Rightarrow \tan 30° = \frac{8\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{8} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

دویم مثال: د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث چې لاندې رسم شوی دی، په دې مثلث کې $\tan c, \cos c, \sin c$ او $\cot c$ په لاس راوړئ او د $\tan c$ رابطه د $\cos c$ او $\sin c$ نسبتونو سره پرتله کړئ.

حل: لومړی د فیثاغورث د قضیې په مرسته د ABC په مثلث کې د AC اوږدوالی پیدا کوو.



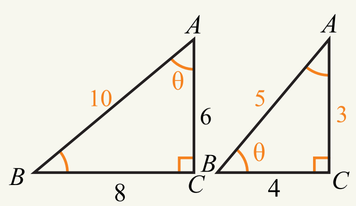
$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

$$5^2 = 3^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 25 - 9 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

$$\sin C = \frac{3}{5} \qquad \cos C = \frac{4}{5} \quad , \quad \tan C = \frac{3}{4} \quad , \quad \cot C = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\sin C}{\cos C} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4} \qquad \tan C = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \tan C = \frac{\text{Sin C}}{\text{Cos C}}$$

پوښتنې



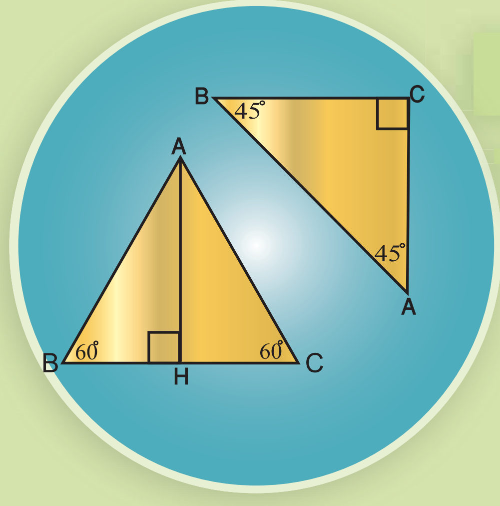
1- په مخامخ شکلونو کې $Sin\theta, Cos\theta, \tan\theta$ او $Cot\theta$ پیدا کړئ.

2- د $\overset{\Delta}{ABC}$ په مثلث کې چې ضلعې یې سره مساوي دي $\tan A$ او $\tan B$ پیدا کړئ.

3- که د یوه قایم الزاویه مثلث قاعده ثابته وساتو او حاده زاویه یې لویه شي د $\tan\theta$ په نسبت کې څه بدلون پیښیږي.

د ځانګړو زاویو مثلثاتي نسبتونه
($30°$، $60°$، $45°$ او $90°$)

مخامخ مثلثونه څه ډول مثلثونه دي د اضلاعګانو اوږدوالی یې وټاکئ.



فعالیت

- د $\overset{\Delta}{ABC}$ یو متساوي الاضلاع مثلث رسم کړئ.
- د $\overline{AH}$ ارتفاع یا جګوالی رسم کړئ، په دې ډول مثلثونو کې جګوالی کومې ځانګړتیاوې لري.
- د فیثاغورث د قضیې څخه په ګټه اخیستنه د جګوالي یا ارتفاع اوږدوالی یا د مثلث جګوالی پیدا کړئ.
- ایا کولای شئ چې د $30°$ او $60°$ زاویو مثلثاتي نسبتونو عددي قیمت پیدا کړئ.
- د $\overset{\Delta}{ABC}$ یو متساوي الساقین، قایم الزاویه مثلث رسم کړئ، چې د هرې ضلعې یا څنډې اوږدوالی یې یو واحدوي.
- هره حاده زاویه څو درجې ده؟ ولې؟ د وتر د اوږدوالي اندازه یې حساب کړئ.
- د $45°$ زاویې مثلثاتي نسبتونه په لاس راوړئ.

د پورتني فعالیت څخه لاندې جدول جوړ ولای شو.

زاویې / مثلثاتي نسبتونه	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	نا ټاکلی (نا معین)

مثال: په لاندې اړیکو یا رابطو کې د x او y عددي قیمت پیدا کړئ.

1) $x = \sin 60^\circ + \sin 30^\circ$
2) $y = \cos 60^\circ + \cos 30^\circ$
3) $\tan 60^\circ - \sin 30^\circ = ?$
4) $y = \tan 30^\circ - \cos 60^\circ$
5) $\tan 45^\circ - \sin 45^\circ = ?$
6) $y = \tan 30^\circ + \tan 60^\circ$

حل: په پورتنیو اړیکو کې د هر مثلثاتي نسبت په ځای عددي قیمت وضع کوو:

1) $x = \sin 60^\circ + \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

2) $y = \cos 60^\circ + \cos 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

3) $x = \tan 60^\circ - \sin 30^\circ = \sqrt{3} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}-1}{2}$

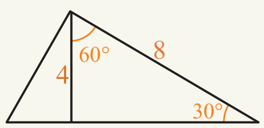
4) $y = \tan 30^\circ - \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}-3}{6}$

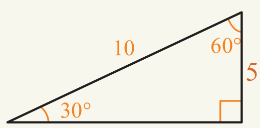
5) $x = \tan 45^\circ - \sin 45^\circ = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

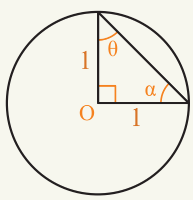
6) $y = \tan 30^\circ + \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{3}$

پوښتني

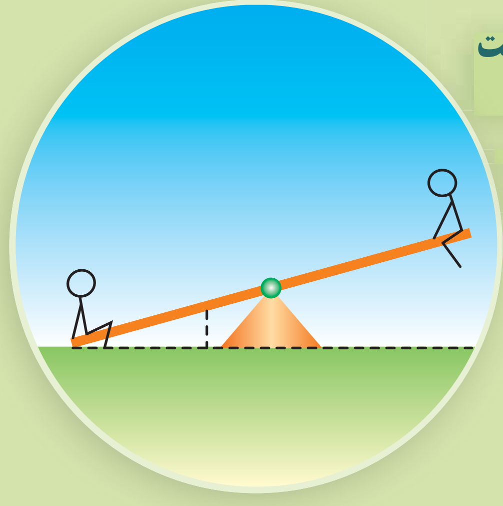
په لاندې شکلونو کې د $30^o, 45^o$ او 60^o زاویو د $Sin, Cos, \tan$ او Cot مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.







د يوه مستقيم خط د ميل او تانجنت اړيکه



د رافعې ميل ښــې ياکيڼــې خوا ته په څه پورې اړه لري؟

فعاليت

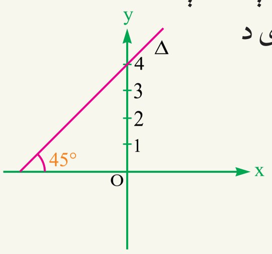
- د $A(1,3)$ او $B(0,0), C(1,0)$ ټکي د وضعيه کمياتو په مستوي کې وښيئ، هغه مثلث چې راسونه د دې ټکو څخه جوړيږي څه ډول مثلث دی؟ ولې؟
- د $\overline{AB}$ مستقيمې کرښې ميل په لاس راوړئ.
- د $\overline{AB}$ مستقيمې کرښې معادله د $y = mx + h$ په شکل وليکئ.
- $\tan A$ په لاس راوړئ د $\overline{AB}$ د مستقيمې کرښې د ميل سره څه اړيکه لري؟
- د $\overline{AB}$ په مستقيم دوه اختياري ټکي په پام کې ونيسئ، د دې ټکو په لرلوسره د مستقيمې کرښې ميل پيدا کړئ. ايا د $\tan B$ د مستقيمې کرښې د ميل برابري ليدل کيږي؟

د پورتني فعاليت څخه ليدل کيږي، چې د هغې مستقيمې کرښې ميل چې د x له محور سره حاده زاويه جوړوي، د هغې زاويې له تانجنت سره چې د کرښې او د x محور مثبت جهت سره يې جوړوي برابره ده. د $y = mx + h$ معادله کې $m = \tan A$ دی.

لومړی مثال: د Δ مستقيمه کرښه د y محور په 4 کې پريکوي او د x محور له مثبت جهت سره 45^o زاويه جوړوي، که $\tan 45^o = 1$ وي د Δ مستقيمې کرښې معادله وليکئ.

حل: پوهيږو چې د مستقيمې کرښې معادله $y = mx + h$ ده نو لومړی د مستقيمې کرښې ميل په لاس راوړو:

$$\left.\begin{aligned} m &= \tan\theta \\ m &= \tan 45^o \\ m &= 1 \\ h &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} y &= mx + h \\ y &= x + 4 \end{aligned}$$



دویم مثال: د $\sqrt{3}y - x = 2\sqrt{3}$ مستقیمې کرښې په معادله کې د مستقیمې کرښې میل، د میل زاویه او د y له محور سره د پریکړې ټکی په لاس راوړئ.

حل: لومړی د مستقیمې کرښې معادله په ستندرد شکل $y = mx + h$ بدلوو چې وروسته یې میل او له محور سره د پریکړې ټکی په اسانۍ سره پیدا کولای شو.

$$\sqrt{3}y - x = 2\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}y = x + 2\sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 2$$

$$m = \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = 30^\circ \qquad , \qquad h = 2$$

ایا کولای شئ د فیثاغورث د قضیې او مثلثات ترمنځ اړیکه پیدا کړئ.

فعالیت

- د $\overset{\Delta}{ABC}$ یو قایم الزاویه مثلث چې قایمې جوړونکې ضلعې یې 6 او 8 دي رسم او قایمه زاویه یې په A وښیئ.
- $\sin B$, $\cos B$, $(\sin B)^2$, $(\cos B)^2$ او $(\sin B)^2 + (\cos B)^2$ حساب کړئ.
- $\sin B$, $\cos B$, $(\sin B)^2$, $(\cos B)^2$ او $(\sin B)^2 + (\cos B)^2$ د AB, AC او BC اضلاعو له جنسه ولیکئ څه پایله ترې اخلئ.

د پورتني فعالیت څخه ښکاري چې د یوې حاده زاویې د ساین او کوساین د مربعاتو جمع مساوي له 1 سره ده.

$$(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$$

ځینې وخت د مثلثاتي نسبت د توان علامه په لاندې ډول سره ښودل کیږي.

$$(\sin A)^2 = \sin^2 A$$

پاملرنه وکړئ چې د 2 توان د زاویې په ساین پورې اړه لري نه په زاویه پورې $SinA^2 \neq Sin^2 A$

پوښتنې

1- د هغه مستقیمې کرښې معادله په لاس راوړئ چې د x محور له مثبت جهت سره 60^o زاویه جوړه کړي او د y محور په $(0,5)$ ټکي کې پرې کړي.

2- د $y = x + 4$ کرښې په معادله کې میل، د میل زاویه او د y له محور سره د پریکړې ټکی پیدا کړئ.

a) $\dfrac{(\sin\theta + \cos\theta)^2}{1 + 2\sin\theta\cos\theta} = 1$

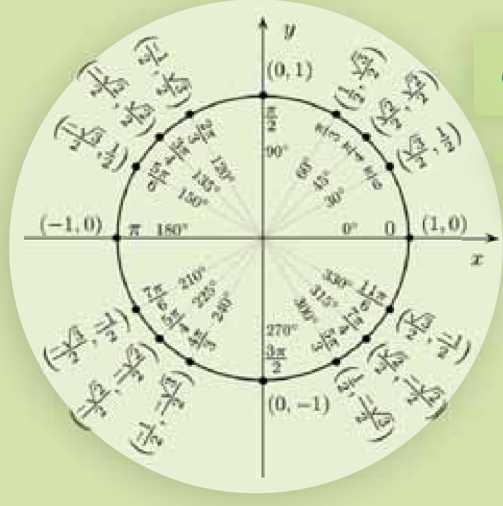
b) $1 + (\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta})^2 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

c) $\dfrac{\tan^2\theta - \sin^2\theta}{\cos\theta} = \sin\theta \times \tan^3\theta$

d) $\dfrac{(\sin A + \cos A)^2 - 1}{2\sin A} = \cos A$

e) $\sin^4 A + \cos^2 A \times \sin^2 A + \cos^2 A = 1$

مثلثاتي جدول او دهغې استعمال



په مخامخ مثلثاتي دايرې په شکل کې د نوموړو زاويو مثلثاتي نسبتونه ښودلای شئ.

فعاليت

- يو متساوي الاضلاع مثلث رسم او هرې زاويې پراخوالی يې وټاکئ.
- په يو مثلث کې د 30° او 60° زاويو مثلثاتي نسبتونه پيداکړئ.
- د زاويې مثلثاتي نسبتونه په يوه مثلث کې وټاکئ.
- ايا د هرې زاويې مثلثاتي نسبتونه په پورته شکل پيداکولای شو؟

د پورتنۍ فعاليت پايله داسې بيانوو:

پايله:
د ځينوزاويو مثلثاتي نسبتونه کولای شو په أسانۍ سره په لاس راوړو خو د يو شمېر نورو زاويو د مثلثاتي نسبتونو محاسبه گران کار دی نو ددې کار لپاره د ځينو پوهانو لخوا مثلثاتي جدولونه د خاصو فورمولونو په واسطه جوړ شوی چې ددې ډوله جدول په مرسته د هرې زاويې مثلثاتي نسبتونه پيداکولای شو.

د يادونې وړ ده چې د جدول په ترتيب کې په يوه قايم الزاويه مثلث کې د θ او $(\frac{\pi}{2}-\theta)$ يا $(90-\theta)$ زاويو د اړيکو ځخه گټه اخيستل شوې ده.

مثلثاتی جدول

θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
0° 00′	0.0000	1.0000	0.0000	∞	**90°** 00′
10	0.0029	1.0000	0.0029	343.77	50
20	0.0058	1.0000	0.0058	171.89	40
30	0.0087	1.0000	0.0087	114.59	30
40	0.0116	0.9999	0.0116	85.940	20
50	0.0145	0.9999	0.0145	68.750	10
1° 00′	0.0175	0.9998	0.0175	57.290	**89°** 00′
10	0.0204	0.9998	0.0204	49.104	50
20	0.0233	0.9997	0.0233	42.964	40
30	0.0262	0.9997	0.0262	38.188	30
40	0.0291	0.9996	0.0291	34.368	20
50	0.0320	0.9995	0.0320	31.242	10
2° 00′	0.0349	0.9994	0.0349	28.636	**88°** 00′
10	0.0378	0.9993	0.0378	26.432	50
20	0.0407	0.9992	0.0407	24.542	40
30	0.0436	0.9990	0.0437	22.904	30
40	0.0465	0.9989	0.0466	21.470	20
50	0.0494	0.9988	0.0495	20.206	10
3° 00′	0.0523	0.9986	0.0524	19.081	**87°** 00′
10	0.0552	0.9985	0.0553	18.075	50
20	0.0581	0.9983	0.0582	17.169	40
30	0.0610	0.9981	0.0612	16.350	30
40	0.0640	0.9980	0.0641	15.605	20
50	0.0669	0.9978	0.0670	14.924	10
4° 00′	0.0698	0.9976	0.0699	14.301	**86°** 00′
10	0.0727	0.9974	0.0729	13.727	50
20	0.0756	0.9971	0.0758	13.197	40
30	0.0785	0.9969	0.0787	12.706	30
40	0.0814	0.9967	0.0816	12.251	20
50	0.0843	0.9964	0.0846	11.826	10
5° 00′	0.0872	0.9962	0.0875	11.430	**85°** 00′
10	0.0901	0.9959	0.0904	11.059	50
20	0.0929	0.9957	0.0934	10.712	40
30	0.0958	0.9954	0.0963	10.385	30
40	0.0987	0.9951	0.0992	10.078	20
50	0.1016	0.9948	0.1022	9.7882	10
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	θ

θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
6° 00′	0.1045	0.9945	0.1051	9.5144	**84°** 00′
10	0.1074	0.9942	0.1080	9.2553	50
20	0.1103	0.9939	0.1110	9.0098	40
30	0.1132	0.9936	0.1139	8.7769	30
40	0.1161	0.9932	0.1169	8.5555	20
50	0.1190	0.9929	0.1198	8.3450	10
7° 00′	0.1219	0.9925	0.1228	8.1443	**83°** 00′
10	0.1248	0.9922	0.1257	7.9530	50
20	0.1276	0.9918	0.1287	7.7704	40
30′	0.1305	0.9914	0.1317	7.5958	30′
40	0.1334	0.9911	0.1346	7.4287	20
50	0.1363	0.9907	0.1376	7.2687	10
8° 00′	0.1392	0.9903	0.1405	7.1154	**82°** 00′
10	0.1421	0.9899	0.1435	6.9682	50
20	0.1449	0.9894	0.1465	6.8269	40
30	0.1478	0.9890	0.1495	6.6912	30
40	0.1507	0.9886	0.1524	6.5606	20
50	0.1536	0.9881	0.1554	6.4348	10
9° 00′	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138	**81°** 00′
10	0.1593	0.9872	0.1614	6.1970	50
20	0.1622	0.9868	0.1644	6.0844	40
30	0.1650	0.9863	0.1673	5.9758	30
40	0.1679	0.9858	0.1703	5.8708	20
50	0.1708	0.9853	0.1733	5.7694	10
10° 00′	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713	**80°** 00′
10	0.1765	0.9843	0.1793	5.5764	50
20	0.1794	0.9838	0.1823	5.4845	40
30	0.1822	0.9833	0.1853	5.3955	30
40	0.1851	0.9827	0.1883	5.3093	20
50	0.1880	0.9822	0.1914	5.2257	10
11° 00′	0.1908	0.9816	0.1944	5.1446	**79°** 00′
10	0.1937	0.9811	0.1974	5.0658	50
20	0.1965	0.9805	0.2004	4.9894	40
30	0.1994	0.9799	0.2035	4.9152	30
40	0.2022	0.9793	0.2065	4.8430	20
50	0.2051	0.9787	0.2095	4.7729	10
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	θ

θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
12° 00′	0.2079	0.9781	0.2126	4.7046	78° 00′
10	0.2108	0.9775	0.2156	4.6382	50
20	0.2136	0.9769	0.2186	4.5736	40
30	0.2164	0.9763	0.2217	4.5107	30
40	0.2193	0.9757	0.2247	4.4494	20
50	0.2221	0.9750	0.2278	4.3897	10
13° 00′	0.2250	0.9744	0.2309	4.3315	77° 00′
10	0.2278	0.9737	0.2339	4.2747	50
20	0.2306	0.9730	0.2370	4.2193	40
30	0.2334	0.9724	0.2401	4.1653	30
40	0.2363	0.9717	0.2432	4.1126	20
50	0.2391	0.9710	0.2462	4.0611	10
14° 00′	0.2419	0.9703	0.2493	4.0108	76° 00′
10	0.2447	0.9696	0.2524	3.9617	50
20	0.2476	0.9689	0.2555	3.9136	40
30	0.2504	0.9681	0.2586	3.8667	30
40	0.2532	0.9674	0.2617	3.8208	20
50	0.2560	0.9667	0.2648	3.7760	10
15° 00′	0.2588	0.9659	0.2679	3.7321	75° 00′
10	0.2616	0.9652	0.2711	3.6891	50
20	0.2644	0.9644	0.2742	3.6470	40
30	0.2672	0.9636	0.2773	3.6059	30
40	0.2700	0.9628	0.2805	3.5656	20
50	0.2728	0.9621	0.2836	3.5261	10
16° 00′	0.2756	0.9613	0.2867	3.4874	74° 00′
10	0.2784	0.9605	0.2899	3.4495	50
20	0.2812	0.9596	0.2931	3.4124	40
30	0.2840	0.9588	0.2962	3.3759	30
40	0.2868	0.9580	0.2994	3.3402	20
50	0.2896	0.9572	0.3026	3.3052	10
17° 00′	0.2924	0.9563	0.3057	3.2709	73° 00′
10	0.2952	0.9555	0.3089	3.2371	50
20	0.2979	0.9546	0.3121	3.2041	40
30	0.3007	0.9537	0.3153	3.1716	30
40	0.3035	0.9528	0.3185	3.1397	20
50	0.3062	0.9520	0.3217	3.1084	10
18° 00′	0.3090	0.9511	0.3249	3.0777	72° 00′
10	0.3118	0.9502	0.3281	3.0475	50
20	0.3145	0.9492	0.3314	3.0178	40
30	0.3173	0.9483	0.3346	2.9887	30
40	0.3201	0.9474	0.3378	2.9600	20
50	0.3228	0.9465	0.3411	2.9319	10
19° 00′	0.3256	0.9455	0.3443	2.9042	71° 00′
10	0.3283	0.9446	0.3476	2.8770	50
20	0.3311	0.9436	0.3508	2.8502	40
30	0.3338	0.9426	0.3541	2.8239	30
40	0.3365	0.9417	0.3574	2.7980	20
50	0.3393	0.9407	0.3607	2.7725	10
20° 00′	0.3420	0.9397	0.3640	2.7475	70° 00′
10	0.3448	0.9387	0.3673	2.7228	50
20	0.3475	0.9377	0.3706	2.6985	40
30	0.3502	0.9367	0.3739	2.6746	30
40	0.3529	0.9356	0.3772	2.6511	20
50	0.3557	0.9346	0.3805	2.6279	10
21° 00′	0.3584	0.9336	0.3839	2.6051	69° 00′
10	0.3611	0.9325	0.3872	2.5826	50
20	0.3638	0.9315	0.3906	2.5605	40
30	0.3665	0.9304	0.3939	2.5386	30
40	0.3692	0.9293	0.3973	2.5172	20
50	0.3719	0.9283	0.4006	2.4960	10
22° 00′	0.3746	0.9272	0.4040	2.4751	68° 00′
10	0.3773	0.9261	0.4074	2.4545	50
20	0.3800	0.9250	0.4108	2.4342	40
30	0.3827	0.9239	0.4142	2.4142	30
30′	0.3827	0.9239	0.4142	2.4142	30′
40	0.3854	0.9228	0.4176	2.3945	20
50	0.3881	0.9216	0.4210	2.3750	10
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	θ

θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
23° 00′	0.3907	0.9205	0.4245	2.3559	**67°** 00′
10	0.3934	0.9194	0.4279	2.3369	50
20	0.3961	0.9182	0.4314	2.3183	40
30	0.3987	0.9171	0.4348	2.2998	30
40	0.4014	0.9159	0.4383	2.2817	20
50	0.4041	0.9147	0.4417	2.2637	10
24° 00′	0.4067	0.9135	0.4452	2.2460	**66°** 00′
10	0.4094	0.9124	0.4487	2.2286	50
20	0.4120	0.9112	0.4522	2.2113	40
30	0.4147	0.9100	0.4557	2.1943	30
40	0.4173	0.9088	0.4592	2.1775	20
50	0.4200	0.9075	0.4628	2.1609	10
25° 00′	0.4226	0.9063	0.4663	2.1445	**65°** 00′
10	0.4253	0.9051	0.4699	2.1283	50
20	0.4279	0.9038	0.4734	2.1123	40
30	0.4305	0.9026	0.4770	2.0965	30
40	0.4331	0.9013	0.4806	2.0809	20
50	0.4358	0.9001	0.4841	2.0655	10
26° 00′	0.4384	0.8988	0.4877	2.0503	**64°** 00′
10	0.4410	0.8975	0.4913	2.0353	50
20	0.4436	0.8962	0.4950	2.0204	40
30	0.4462	0.8949	0.4986	2.0057	30
40	0.4488	0.8936	0.5022	1.9912	20
50	0.4514	0.8923	0.5059	1.9768	10
27° 00′	0.4540	0.8910	0.5095	1.9626	**63°** 00′
10	0.4566	0.8897	0.5132	1.9486	50
20	0.4592	0.8884	0.5169	1.9347	40
30	0.4617	0.8870	0.5206	1.9210	30
40	0.4643	0.8857	0.5243	1.9074	20
50	0.4669	0.8843	0.5280	1.8940	10
28° 00′	0.4695	0.8829	0.5317	1.8807	**62°** 00′
10	0.4720	0.8816	0.5354	1.8676	50
20	0.4746	0.8802	0.5392	1.8546	40
30	0.4772	0.8788	0.5430	1.8418	30
40	0.4797	0.8774	0.5467	1.8291	20
50	0.4823	0.8760	0.5505	1.8165	10
29° 00′	0.4848	0.8746	0.5543	1.8040	**61°** 00′
10	0.4874	0.8732	0.5581	1.7917	50
20	0.4899	0.8718	0.5619	1.7796	40
30	0.4924	0.8704	0.5658	1.7675	30
40	0.4950	0.8689	0.5696	1.7556	20
50	0.4975	0.8675	0.5735	1.7437	10
30° 00′	0.5000	0.8660	0.5774	1.7321	**60°** 00′
10	0.5025	0.8646	0.5812	1.7205	50
20	0.5050	0.8631	0.5851	1.7090	40
30	0.5075	0.8616	0.5890	1.6977	30
40	0.5100	0.8601	0.5930	1.6864	20
50	0.5125	0.8587	0.5969	1.6753	10
31° 00′	0.5150	0.8572	0.6009	1.6643	**59°** 00′
10	0.5175	0.8557	0.6048	1.6534	50
20	0.5200	0.8542	0.6088	1.6426	40
30	0.5225	0.8526	0.6128	1.6319	30
40	0.5250	0.8511	0.6168	1.6212	20
50	0.5275	0.8496	0.6208	1.6107	10
32° 00′	0.5299	0.8480	0.6249	1.6003	**58°** 00′
10	0.5324	0.8465	0.6289	1.5900	50
20	0.5348	0.8450	0.6330	1.5798	40
30	0.5373	0.8434	0.6371	1.5697	30
40	0.5398	0.8418	0.6412	1.5597	20
50	0.5422	0.8403	0.6453	1.5497	10
33° 00′	0.5446	0.8387	0.6494	1.5399	**57°** 00′
10	0.5471	0.8371	0.6536	1.5301	50
20	0.5495	0.8355	0.6577	1.5204	40
30	0.5519	0.8339	0.6619	1.5108	30
40	0.5544	0.8323	0.6661	1.5013	20
50	0.5568	0.8307	0.6703	1.4919	10
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	θ

θ	Sɪɴ θ	Cos θ	Tᴀɴ θ	Cot θ	
34° 00′	0.5592	0.8290	0.6745	1.4826	**56°** 00′
10	0.5616	0.8274	0.6787	1.4733	50
20	0.5640	0.8258	0.6830	1.4641	40
30	0.5664	0.8241	0.6873	1.4550	30
40	0.5688	0.8225	0.6916	1.4460	20
50	0.5712	0.8208	0.6959	1.4370	10
35° 00′	0.5736	0.8192	0.7002	1.4281	**55°** 00′
10	0.5760	0.8175	0.7046	1.4193	50
20	0.5783	0.8158	0.7089	1.4106	40
30	0.5807	0.8141	0.7133	1.4019	30
40	0.5831	0.8124	0.7177	1.3934	20
50	0.5854	0.8107	0.7221	1.3848	10
36° 00′	0.5878	0.8090	0.7265	1.3764	**54°** 00′
10	0.5901	0.8073	0.7310	1.3680	50
20	0.5925	0.8056	0.7355	1.3597	40
30	0.5948	0.8039	0.7400	1.3514	30
40	0.5972	0.8021	0.7445	1.3432	20
50	0.5995	0.8004	0.7490	1.3351	10
37° 00′	0.6018	0.7986	0.7536	1.3270	**53°** 00′
10	0.6041	0.7969	0.7581	1.3190	50
20	0.6065	0.7951	0.7627	1.3111	40
30	0.6088	0.7934	0.7673	1.3032	30
40	0.6111	0.7916	0.7720	1.2954	20
50	0.6134	0.7898	0.7766	1.2876	10
38° 00′	0.6157	0.7880	0.7813	1.2799	**52°** 00′
10	0.6180	0.7862	0.7860	1.2723	50
20	0.6202	0.7844	0.7907	1.2647	40
30	0.6225	0.7826	0.7954	1.2572	30
40	0.6248	0.7808	0.8002	1.2497	20
50	0.6271	0.7790	0.8050	1.2423	10
39° 00′	0.6293	0.7771	0.8098	1.2349	**51°** 00′
10	0.6316	0.7753	0.8146	1.2276	50
20	0.6338	0.7735	0.8195	1.2203	40
30	0.6361	0.7716	0.8243	1.2131	30
40	0.6383	0.7698	0.8292	1.2059	20
50	0.6406	0.7679	0.8342	1.1988	10
40° 00′	0.6428	0.7660	0.8391	1.1918	**50°** 00′
10	0.6450	0.7642	0.8441	1.1847	50
20	0.6472	0.7623	0.8491	1.1778	40
30	0.6494	0.7604	0.8541	1.1708	30
40	0.6517	0.7585	0.8591	1.1640	20
50	0.6539	0.7566	0.8642	1.1571	10
41° 00′	0.6561	0.7547	0.8693	1.1504	**49°** 00′
10	0.6583	0.7528	0.8744	1.1436	50
20	0.6604	0.7509	0.8796	1.1369	40
30	0.6626	0.7490	0.8847	1.1303	30
40	0.6648	0.7470	0.8899	1.1237	20
50	0.6670	0.7451	0.8952	1.1171	10
42° 00′	0.6691	0.7431	0.9004	1.1106	**48°** 00′
10	0.6713	0.7412	0.9057	1.1041	50
20	0.6734	0.7392	0.9110	1.0977	40
30	0.6756	0.7373	0.9163	1.0913	30
40	0.6777	0.7353	0.9217	1.0850	20
50	0.6799	0.7333	0.9271	1.0786	10
43° 00′	0.6820	0.7314	0.9325	1.0724	**47°** 00′
10	0.6841	0.7294	0.9380	1.0661	50
20	0.6862	0.7274	0.9435	1.0599	40
30	0.6884	0.7254	0.9490	1.0538	30
40	0.6905	0.7234	0.9545	1.0477	20
50	0.6926	0.7214	0.9601	1.0416	10
44° 00′	0.6947	0.7193	0.9657	1.0355	**46°** 00′
10	0.6967	0.7173	0.9713	1.0295	50
20	0.6988	0.7153	0.9770	1.0235	40
30	0.7009	0.7133	0.9827	1.0176	30
40	0.7030	0.7112	0.9884	1.0117	20
50	0.7050	0.7092	0.9942	1.0058	10
45° 00′	0.7071	0.7071	1.0000	1.0000	**45°** 00′
	Cos θ	Sɪɴ θ	Cot θ	Tᴀɴ θ	θ

فعالیت

- د جدول لومړي پرته لیکه یا سطر او ولاړه لیکه یا ستون څه راښیي؟
- د جدول د کیڼې او ښي خوا لومړي ولاړه لیکه یا ستون په کومه زاویه پیل او په کومه زاویه ختم شوی؟
- د جدول لومړي او وروستی کرښه څه را ښیي؟
- که یوه زاویه 45° او یا له هغه څخه کوچنی وي هغه د جدول کیڼه خوا کې د درجې په ستون کې پیدا کوو او مثلثاتي نسبت یې له پورته خوا څخه لولو یا له ښکته خوا څخه او که زاویه له 45° څخه لویه وي څه کوو؟

د پورته فعالیت پایله داسې بیانوو:

که زاویه له 45° څخه کوچنی وي هغه دجدول د کیڼې خوا په لومړي ولاړه لیکه ستون کې، او مثلثاتي نسبت یې په پورته خوا لومړي پرته لیکه یا سطر کې ګورو.

که زاویه له 45° څخه لویه وي هغه زاویه د جدول دښي خوا په لومړي ولاړه لیکه یا ستون کې، او مثلثاتي نسبت یې په ښکته خوا څخه پورته خوا ته په وروستنی پرته لیکه یا سطر کې پیدا کوو. چې د پام وړ زاویې د اړوند کرښې او د مثلثاتي نسبت د اړوندې ولاړې لیکې یا ستون پرېکړه د زاویې مطلوب نسبت راکوي.

لومړی مثال: د $30^\circ\ 10'$ کوساین پیدا کړئ.

حل: لومړی د جدول د کیڼې خوا په لومړي ولاړه لیکه یا ستون کې مطلوبه زاویه $(30^\circ 10')$ پیدا کوو او د جدول په لومړي کرښه(سطر) کې مطلوب مثلثاتي نسبت پیدا کوو ددې ولاړې او پرتې لیکې(سطر اوستون) پرېکړه د 0,8646 عدد راکوي چې دا د $(30^\circ 10')$ زاویې کوساین دی.

$$\cos(30^\circ 10') = ? \qquad 30^\circ 10' \cdots\cdots 0{,}8646$$

دویم مثال : د $84^\circ\ 50'$ ساین وټاکئ.

حل: لومړی د جدول د ښی خوا په لومړی ستون کې د پام وړ زاویه $84^\circ\ 50'$ پیدا کوو او د جدول په وروستنی کرښه(سطر) کې د پام وړ مثلثاتي نسبت پیداکوو ددې پرتې او ولاړو لیکو(سطر او ستون) پرېکړه د (0,9959) عدد راکوي چې د $84^\circ\ 50'$ زاویه کوساین دی.

$$\sin 84^\circ 50' = ? \qquad 0.9959 \cdots\cdots 84^\circ 50'$$

یادونه

هغه جدول چې تر اوسه مو ترې کار واخسته د هغو زاويو مثلثاتي نسبتونه چې توپير يې لس دقيقې وي راښيي د هرې زاويې مثلثاتي نسبت د دې جدول په مرسته نشو ټاکلی، نو اوس غواړو داسې طريقه بيان کړو چې ددې جدول په مرسته د هرې زاويې مثلثاتي نسبتونه په لاس راوړو چې دا طريقه د انټرپوليشن Interpolation په نامه ياديږي او په لاندې مثالونو کې يې ترې کار اخلو:

دريم مثال: د $\tan 42^\circ 35'$ زاويې تانجنت په لاس راوړئ.

حل: په جدول کې د $42^\circ 35'$ زاويې تانجنت نشته خو د $42^\circ 40'$ او $42^\circ 30'$ زاويو تانجانتونه په جدول کې شته دی چې د هغوی په مرسته $42^\circ 35'$ زاويې مثلثاتي نسبت داسې پيداکوو:

$$\begin{matrix} \tan 42^\circ 40' \\ \tan 42^\circ 35' \\ \tan 42^\circ 30' \end{matrix} \begin{matrix} = 0{,}9217 \\ = x \\ = 0{,}9163 \end{matrix} \quad 5,\ 10,\ x,\ 0{,}0054$$

د مثلثاتي نسبتونو توپير		د دو زاويو توپير
0.00054	:	10'
x	:	5'

ليدل کيږي چې د لومړۍ او دويمې زاويې فرق 5 او د لومړۍ او دريمې زاويې فرق 10 په همدې ترتيب سره د tan فرق يې x او 0,0054 دی يعنې که زاويه د 10 په اندازه فرق ولري نو tan يې د 0,0054 په اندازه فرق کوي او که زاويه د 5 په اندازه فرق وکړي نو tan د x په اندازه فرق کوي چې د تناسب په مرسته ليکو:

$$\frac{5}{10} = \frac{x}{0{,}0054} \Rightarrow x = 0{,}0027$$

د x قيمت د کوچنۍ زاويو له tan سره جمع کوو:

$$0{,}9163 + 0{,}0027 = 0{,}9190$$

$$\tan 42^\circ 35' = 0{,}9190$$

پوښتنې

د مثلثاتي جدول څخه په ګټې اخيستنې سره د $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ مثلثاتي نسبونه د $\alpha = 35^\circ 20'$ او $\alpha = 75^\circ 10'$ زاويو پيداکړئ.

د قایم الزاویه مثلثونو حل

مخامخ شکل ته پام وکړئ د څلي(منار) جګوالی څنګه پیداکولی شئ.

فعالیت

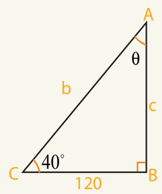
- که دیوه قایم الزاویه مثلث یوه زاویه '40 °30 وي بله زاویه یې پیدا کړئ.
- که د یوه قایم الزاویه مثلث یوه زاویه °29 او وتر یې $25cm$ وي د مثلث مجهول عناصر پیدا کړئ.
- که د قایم الزاویه مثلث دوې ضلعې یا یوه ضلعه او یوه حاده زاویه یې معلومه وي د مثلث نور عناصر څنګه پیداکولای شو.

د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

په هر قایم الزاویه مثلث کې که یوه حاده زاویه یا دوه ضلعې معلومې وي د مثلث پاتې اجزاوې د مثلثاتي توابعو په مرسته په لاس راوړو.

مثال: دیوه قایمه الزاویه مثلث یوه حاده زاویه °40 که ددې زاویې مجاور ضلعه 120 واحده د اوږوالي وي نوموړی مثلث حل کړئ.

حل: څرنګه چې د مثلث یوه زاویه او دوه ضلعې نا معلومې وي نو ددې معلومو اجزاوو په مرسته نا معلومې اجزاوې په لاندې ډول په لاس راوړو:



1, $\theta = 90^\circ - \hat{c} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$

2, $\tan 40^\circ = \dfrac{c}{120} \Rightarrow c = 120 \tan 40^\circ = 120 \cdot 0{,}8391 = 100{,}692$

3, $\cos 40^\circ = \dfrac{120}{b} \Rightarrow b = \dfrac{120}{\cos 40^\circ} = \dfrac{120}{0{,}7660} = 156.6579$

$b^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{(120)^2 + (156.692)^2} = 156{,}6579$

دويم مثال: د يوه قايمه الزاويه مثلث وتر $49.7cm$ او يوه قايمه ضلعه يې $25cm$ وي نومورې مثلث حل کړئ.

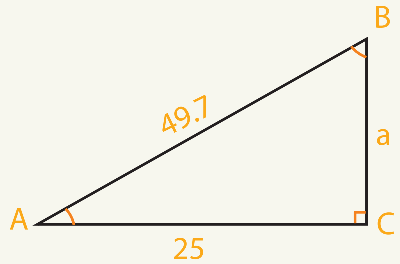
حل: ليدل کېږي چې د مثلث دوه عناصر معلوم وي نو نا معلوم عناصر يې داسې پيدا کوو:

$$1)\cos\hat{A} = \frac{25}{49,7} = 0,503$$

$$\cos\hat{A} = 0,503 \quad \Rightarrow \hat{A} = 59,8° = 59°,48'$$

$$2)B = 90° - \hat{A} \quad \Rightarrow B = 90 - 59,8° = 30,2° = 30°12'$$

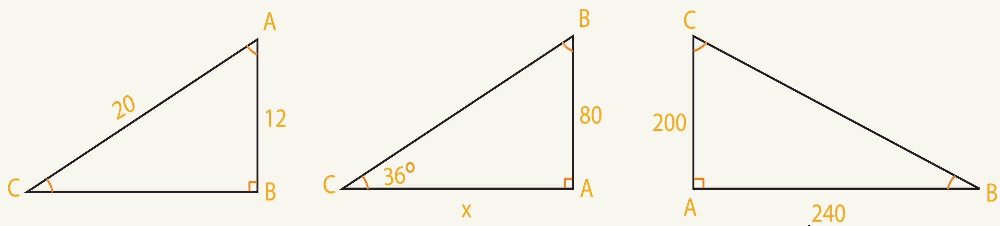
$$3)\tan\hat{A} = \frac{a}{25} \quad \Rightarrow a = \tan\hat{A} \cdot 25 = 25 \cdot 1,7182 = 43$$



پوښتنې

1 - د يوه قايمه الزاويه مثلث يوه حاده زاويه $38°\ 50'$ او د دې زاويې مجا وره ضلعه 311 واحده ده نو مورې مثلث حل کړئ.

2 - په لاندې شکلونو کې مجهول عناصر وټاکئ.

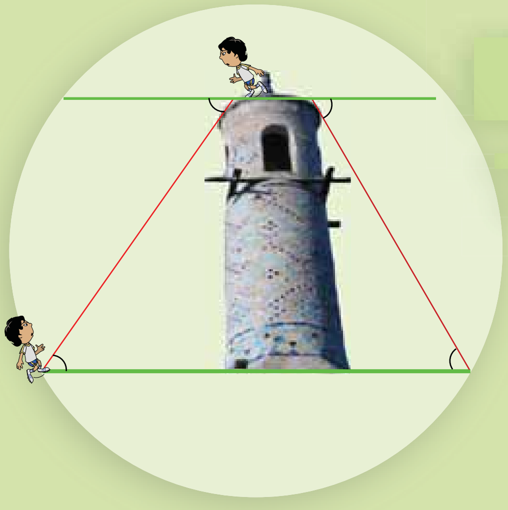


$x = ?$ $\hat{A} = ?$

$x = ?$ $\hat{B} = ?$

$\hat{B} = ?$ $\overline{BC} = ?$

د میل یا ارتفاع او تنزیل زاویې



مخامخ شکل ته پام وکړئ د میل او تنزیل زاویې وښایئ.

فعالیت

- که احمد په یو جګوالی پروت وي دلید کرښه د افقي سطحې سره څه ډول زاویه جوړوي او دا زاویه په کوم نوم یا دېږي(د تحول ساحه یې کومه فاصله ده) ؟
- که یو شی په یوه ښکته ځای کې پروت وي دلید کرښه د افقي سطحې سره څه ډول زاویه جوړوي او دا زاویه په کوم نامه یادیږي(د تحول ساحه یې په کومه فاصله ده) ؟

دپورته فعالیت پایله داسې بیانوو:

1 - د ارتفاع زاویه Angle of Elevation

که یو شی په یوه ارتفاع پروت وي نو دلید کرښه له افق سره یوه زاویه جوړوي چې د جګوالي زاویه بلل کېږي لکه ورکړل شوي شکل کې د α زاویه.

2 - د تنزیل زاویه Angle of Depression

که یو شی په ټیټ ځای کې پروت وي د لید کرښه له شی سره یوه زاویه جوړوي چې د تنزیل زاویه بلل کېږي لکه په شکل کې د β زاویه.

د افق کرښه

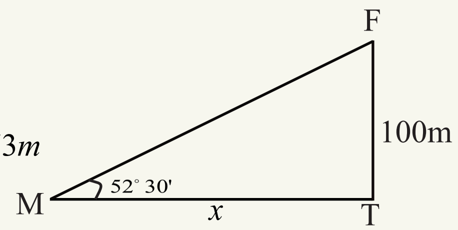
P_1 β

د لید کرښه

α

P_2 د افق کرښه

لومړی مثال: د $\overset{\Delta}{MFT}$ قایمه الزاویه مثلث کې د جګوالی یا ارتفاع زاویه $52°\ 30'$ که د مثلث جګوالی $100m$ وي د مثلث وتر او قاعده یې پیدا کړئ.



$$\tan 52°30' = \frac{\overline{TF}}{\overline{MF}} = \frac{100}{X}$$

$$x = \frac{100}{\tan 52°30'} = \frac{100}{1.3092} \Rightarrow x = 76.73m$$

دویم مثال: د یوه کاغذ پران(پتنګ) د تار اوږدوالی 120m وي ددې کاغذ پران(پتنګ) د جګوالی یا ارتفاع زاویه $45°$ ده د کاغذ پران(پتنګ) جګوالی وټاکی.

$$\frac{h}{120} = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow h = 60 \cdot \sqrt{2}m$$

دریم مثال: یو نوري(ترسد) برج له بحر څخه $120f$ جګوالی لري هغه نزولي زاویه چې د برج نه یو بېړۍ(کښتی) لیدل کېږي $15°$ درجې ده نوموړي بېړۍ له برج نه څومره فاصله لري .

$$\cot A = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

$$\cot 15 = \frac{\overline{AC}}{120}$$

$$\Rightarrow \overline{AC} = 120 \cdot \cot 15° = 120 \cdot 3,7 = 444\, ft$$

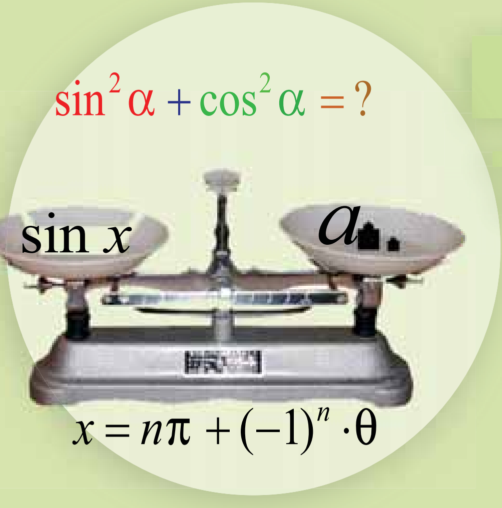
پوښتنې

1- د هغه ونې ارتفاع پیدا کړئ چې د ارتفاع زاویه یې له $20°$ څخه $40°$ واوړي نو په هغه صورت کې به لیدونکی $75\,ft$ ونې ته نږدې شي.

2- یوه ونه باد له پورته خواڅخه داسې ماته کړې چې د ونې تنه او ماته برخه یې یو قایمه الزاویه مثلث له ځمکې سره جوړه کړې که ماته برخه له ځمکې سره $50°$ زاویه جوړه کړې وي او د ونې تنه $20\,ft$ وي د ونې جګوالي پیدا کړئ.

مثلثاتی معادلې

مخامخ مثلثاتي اړيکې له څه سره مساوي دي
وضاحت ورکړئ.



پوهيږو چې مطابقت هغه مساوات دی چې د متحول د ټولو قيمتونو لپاره د مساوات دواړه خواوې سره برابرې شي او معادله هغه مساوات دی چې د متحول د ځينې قيمتونو لپاره د مساوات دواړه خواوې سره برابرې شي.

فعاليت

- د فيثاغورث د قضيې او مثلثات ترمنځ اړيکه وښيئ ايا دا اړيکه مطابقت دی که معادله؟
- مطابقت او معادله څه تو پير لري دا توپير په مثلثاتي اړيکو کې وڅيړئ.
- د $\sin x = 1$ رابطه کې x مجهول دی که $\sin x$
- داسې قوسونه يا زاويې چې يو شان مثلثاتي نسبتونه ولري وښيئ.

د پورته فعاليت پايله په يو تعريف کې په لاندې ډول بيانوو:

تعريف:

هره معادله چې په هغې کې يو ياځو مثلثاتي نسبتونه ګډون ولري مثلثاتي معادله بلل کېږي لکه $\sin x - 1 = 0$ يا $2\cos x - 1 = 0$

- هغه قوس يا زاويه چې د هغې مثلثاتي نسبت مطلوب وي اصلي مجهول بلل کېږي لکه په پورتنيو معادلو کې x اصلي مجهول دی.

- د اصلي مجهول مثلثاتي نسبت ته فرعي مجهول وايي لکه په پورتني معادلو کې $\cos x$ او $\sin x$ فرعي مجهول دی.

-هغه زاويې چې مثلثاتي نسبتونه يې يو شان دي پريوديک توابع بلل کېږي، چې فورمولونه په

لاندې ډول دي:

1 -د $\sin\theta$ مثلثاتي نسبت عمومي فورمول $x = n\pi + (-1)^n \cdot \theta,\ n = 0,1,2....$

2- د $\cos\theta$ مثلثاتي نسبت عمومي فورمل $x = 2n\pi \pm \theta\ ,n = 0,1,2....$

3- د $\tan\theta$ مثلثاتي نسبت عمومي فورمول $x = n\pi + \theta\ ,\ n = 0,1,2....$

د مثلثاتي معادلو د حل لپاره په لاندې ډول عمل کوو:

1 - د الجبري معادلو د حل په مرسته د فرعي مجهول قيمت په لاس راوړو.

2- د مثلثاتي نسبتونو د جدول په مرسته د اصلي مجهول قيمت په لاس راوړو.

3- څرنګه چې مثلثاتي معادلې پريوديک معادلې دي نو ډېر حلونه لري نو د هغو زاويو د فورمولونو په مرسته چې يوشان نسبتونه لري د معادلې حلونه دي.

مثال: د $2\sin x - \sqrt{2} = 0$ او $\cos x + \frac{1}{2} = 1$ مثلثاتي معادلو حلونه پيدا کړئ.

$\cos x + \frac{1}{2} = 1$	$2\sin x - \sqrt{2} = 0$
$\cos x = 1 - \frac{1}{2}$	$2\sin x = \sqrt{2}$
$\cos x = \frac{1}{2}$	$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$x = 30° = \frac{\pi}{6}$	$x = 45° = \frac{\pi}{4}$
$x = 2n\pi \pm \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$	$x = n\pi + (-1)^2(\frac{\pi}{4})$

پوښتني

دې لاندې معادلو حل پيدا کړئ.

$c)\ 2\cos 4x - \sqrt{2} = 0$ $\qquad$ $b)\ 2\sin 3x + \sqrt{3} = 0$ $\qquad$ $a)\ \sqrt{3}\cot x - 1 = 0$

د څلورم څپرکي لنډيز

- مثلثات له دوو يوناني کلمو څخه چې ټرايگون او متري چې د مثلث د اندازه کولو معنی لري جوړ شوی دی او له هغه علم څخه عبارت دی چې د مثلث د عناصرو ترمنځ اړيکي څيړي.
- که په يوه ضلعه د مثلث يوه موازي کرښه رسم شي پرېکړې ضلعې په مناسبو ټوټو وېشي دا قضيه د تالس د قضيې په نامه ياديږي.
- په هر قايم الزاويه مثلث کې د حاده زاويې د مخامخ ضلعې اوږدوالی دوتر په اوږدوالي د حاده زاويې د ساين sine په نامه ياديږي.
- په هر قايم الزاويه مثلث کې د حاده زاويې د گاونډې يا مجاورې ضلعې اوږدوالی د وتر په اوږدوالي د حاده زاويې د کوساين cosine په نامه ياديږي.
- په هر قايم الزاويه مثلث کې د حاده زاويې د مخامخ څنډې يا ضلعې اوږدوالی د گاونډې يا مجاورې څنډې يا ضلعې په اوږدوالي د حاده زاويې د تانجنت tangent په نامه ياديږي.
- په هر قايم الزاويه مثلث کې د حاده زاويې د $\sin\theta$ او $\cos\theta$ نسبتونو نسبت د حاده زاويې د $\tan\theta$ په نامه ياديږي $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$.
- په هر قايم الزاويه مثلث کې د حاده زاويې د $\cos$ او $\sin$ نسبتونو نسبت د حاده زاويې د $\cot$ په نامه ياديږي $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$.
- هغه زاويه لکه(α)چې مستقيمه کرښه يې د x محور له مثبت جهت سره جوړوي د ميل زاويې په نامه ياديږي او د دې کرښې ميل د $\tan\alpha$ سره مساوي ده $m = \tan\alpha$.
- په هر قايم الزاويه مثلث کې د $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ اړيکه رېښتياده.
- د $\sin x, \cos x$ او $\tan x$ مثلثاتي نسبتونه پرته له زاويې معنا نلري.
- د $y = mx + b$ ، m معادله کې، m دهغه زاويې تانجنت دی چې مستقيمه کرښه يې د y محور له مثبت جهت سره جوړوي او h د y محور سره د پرېکړې ټکی دی.
- $Sin30^o$ له $Cos60^o$ سره برابردی.
- $Cos30^o$ له $\sin 60^o$ سره برابر دی.
- $Cos45^o$ له $Sin45^o$ برابر دی.

د څلورم څپرکي پوښتنې

• په لاندې سوالونو کې هر سوال ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي چې یو یې سم دی. سم ځواب په نښه کړئ.

1- د یوې حاده زاويې $\sin\alpha$ عبارت له:

a) $\dfrac{\text{د حاده زاويې د مخامخ ضلعې اوږدوالی}}{\text{وتر اوږدوالی}}$

b) $\dfrac{\text{وتر اوږدوالی}}{\text{د حاده زاويې د ګاونډې(مجاورې) ضلعې اوږدوالی}}$

c) $\dfrac{\text{د حاده زاويې د ګاونډې(مجاورې) ضلعې اوږدوالی}}{\text{وتر اوږدوالی}}$

d) $\dfrac{\text{وتر اوږدوالی}}{\text{د حاده زاويې د مخامخ ضلعې اوږدوالی}}$

2- د $\tan\alpha$ نسبت مساوي دی په:

a) $\dfrac{\sin x}{\cos x}$ b) $\dfrac{\cos x}{\sin x}$ c) $\dfrac{1}{\sin x}$ d) $\dfrac{1}{\cos x}$

3- د $2y = 2x - 3$ په معادله کې د مستقيمې کرښې ميل عبارت له:

a) $\dfrac{3}{2}$ b) -1 c) 1 d) b او a

4- د هغې مستقيمې کرښې معادله چې د y محور په (۳ ، ۰) کې پرېکړي او د x محور له مثبت جهت سره 45^o زاويه جوړه کړي برابره ده له:

a) $y = x + 3$ b) $2y = 2x - 3$ c) $2x - y = 0$ d) هيڅ يو

5- د $\sin^2 30 + \cos^2 30$ افادې قيمت برابر دی له:

a) 1 b) 2 c) -2 d) -1

6- $\sin 45^o$ او $\cos 45^o$ برابردي له:

a) 1 b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ d) $\sqrt{2}$

7- د $\dfrac{\sin 30^o - \cos 60^o}{\cos 60^o + \sin 30^o}$ افادې قيمت برابر دي له:

a) 0 b) 1 c) -1 d) درې واړه ځوابونه سم دي.

• تش ځایونه په مناسبو بیانونو ډک کړئ.

1- په یوه قایم الزاویه مثلث کې د دوو نورو حاده زاویو مجموعه .... ده.

2- که د یوه متساوي الضلاع مثلث یوه څنډه $10cm$ وي جګوالی یې.............. دی.

3- دیو حاده زاویې ساین عبارت له............................ .

4- Triganomitry له دوو کلمو.............. او .... څخه جوړه شوې ده.

5- $\tan\theta \cdot \cot\theta$ برابر په .... دي.

• د لاندي جملو څخه کومه سمه او کومه ناسمه ده، دسمې په مخ کې د (س) توري او د ناسمې په مخ کې د (ن) توري ولیکې.

1- (   ) د $\sin x$ نسبت مساوي په   دی.

2- (   ) $\sin 30^o$ او $\cos 60^o$ یو بل سره مساوي دي.

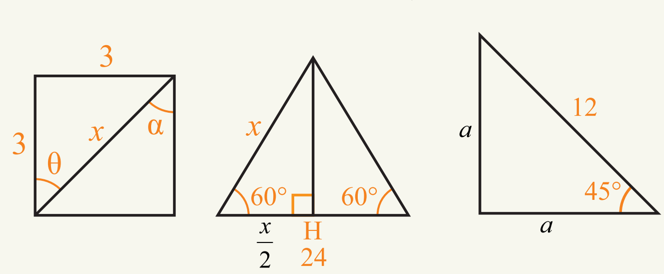
3- (   ) د $2y = 5x - 1$ معادله کې د ډي کرښې میل $\frac{2}{5}$ دی.

4- (   ) د $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ نسبت د $\tan\theta$ سره برابر دی.

5- (   ) $1+\cos^2\theta$ برابر په $\sin^2\theta$ دی.

• لاندې سوالونه حل کړئ.

1- په لاندې شکلونو کې د ورکړ شوو زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.



2- په لاندې سوالونوکې د A او B قیمتونه حساب کړئ.

1) $A = \cos 30^\circ - \sin 30^\circ$

2) $B = \cos 60^\circ - \sin 30^\circ$

3) $A = \tan 30^\circ - \tan 60^\circ$

4) $B = \cos 60^\circ + \sin 30^\circ$

5) $A = \frac{1}{2}(\tan 45^\circ - \cos 45^\circ)$

6) $B = \tan 45^\circ + \tan 60^\circ$

7) $A = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 60^\circ + \cos 45^\circ)$

8) $B = 2 - \frac{1}{2}(\sin 45^\circ - \cot 45^\circ)$

9) $A = \sin 45^\circ + \cos 30^\circ - \tan 45^\circ$

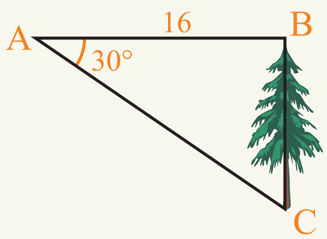
3- دا $\frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{1 + \sin x \cos x} = \sin x - \cos x$ رابطه ثبوت کړئ.

4- که $\sin x = \frac{7}{12}$ وي $\cos x$ او $\tan x$ پیداکړئ.

5- که $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ وي $\sin x$ او $\tan x$ پیداکړئ.

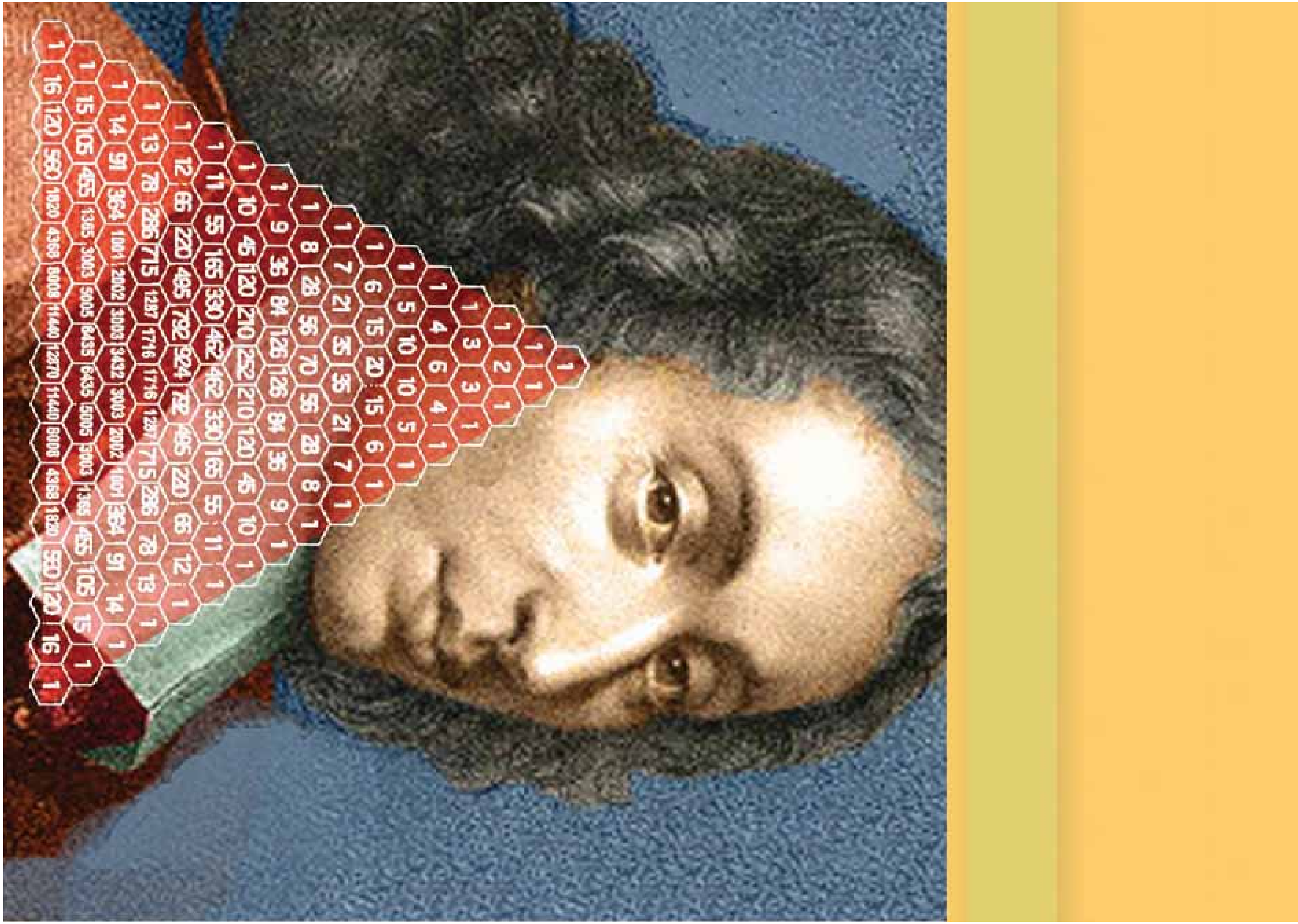
6- که چېرې α زاویه صفر ته نیږدې شي $\tan \alpha$ ، کوم عدد ته نږدې کیږي د شکل له مخې د خپلې وینا سموالی وښیئ.

7- په لاندې شکل کې که $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ وي د $\overline{AC}$ او $\overline{BC}$ واټنونه حساب کړئ.



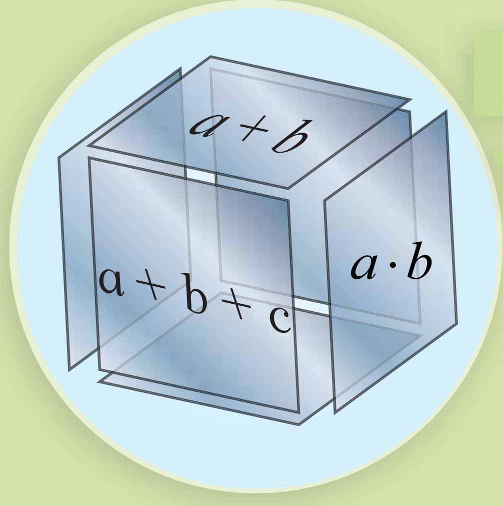
پنځم ځپـــرکی

څو جمله يي



الجبري افادې

د مخامخ شــکل په ســطحو لیکل شــویو الجبري افادو نومونه واخلئ.



فعالیت

لاندې افادې په پام کې ونیسئ.

$a)\ 2x$ $b)\ \frac{1}{3}xy^3$ $c)\ \sqrt{2}xym'$ $d)\ 9x^2$

$e)\ 5x$ $f)\ 2xy^3$ $g)\ 3x^2$ $h)\ \frac{4x^2}{x-1}$

- یوبل ته ورته افادې په نښه کړئ.
- لاندې الجبري افادې تر ممکن حده ساده کړئ.

$a)\ 2x+6x^2+\sqrt{2}xym^4$ $b)\ 3x^2+6x^2$ $c)\ \frac{1}{3}xy^3+2x$ $d)\ \frac{1}{3}xy^3+2xy^3$

- هغه افادې چې نشي ساده کېدای، څنګه باید ولیکل شي، د هر یوې لپاره کوم نوم لازم ګڼئ؟
- په هرحالت کې د افادو تر ټولو لوړ توان نسبت x ته وټاکئ.

د پورتنی فعالیت څخه کولای شو ولیکوچې:

که چیرې په یوه الجبري افاده کې د مشابه جملاتو له ساده کولوڅخه وروسته یوازې یو حد ولرئ، هغې ته یو حده، (Monomial) که جمع یا تفریق د دوحدونو ولرو هغې ته دوه حده یا (Bionomial) که جمع یا تفریق ددریوحدنوولروهغې ته درې حده یا (Trinomial) اوکه له دریو حدونو څخه زیات حدونه ولرو پولینوم یا (Polinomila) په نامه یادیږي به دي شرط چه د تورو توانونه ئې مکمل عدودنه وی هره الجبري افاده کې تر ټولو لوړ توان نسبت یوه ځانګړی متحول ته د الجبري افادې درجه نظر هغه متحول ته بلل کیږي.

مثال: لاندې جدول بشپړ کړئ.

درجه		مناسبې نومونې				الجبري افادې
نظر x ته	نظر y ته	يوه حده	دوه حده	درې حده	څو حده	
						$\sqrt{32}y^2 - 3y + 2y^3$
2			✓			$3x^2 - 7x$
						$6x^2 - 4x - 1$
						$0.4x^2y - 2x^4 + 16y^2$
						$13x - 2y^3 + 6x^3y$
						$3 - 5 + x^2 - y^3 - 2xy$
						$4x^2 - 2x + 6x^2 - 5x$

پوښتنې

1- لاندې الجبري افادې ساده او هرې يوې درجه نسبت هرمتحول ته وټاکئ.

$a)\ x^2 - 3x + 6x^2 - \frac{3}{2}x$ $\qquad b)\ \sqrt{2}mn^2 - \frac{1}{2}m + 2\sqrt{2}n^2m + 3m$

$c)\ -4x^2 + 2x^2 + 14x - 8 + 4x^3 - 16x - 2x^2$ $\qquad d)\ 4 - x^3y - 2 + yx^3 - 4xy - 1$

2- لاندې الجبري افادې، څو جمله يي دي، دهرې يوې درجه نسبت هر متحول ته وټاکئ.

$a)\ 6x^2 - 4x - 12xy^6 - 2x^5$ $\qquad b)\ 8x^6 - 4xy^6 - 5x^2$

$c)\ 6x^2y^6m^9$ $\qquad d)\ \sqrt{3}x - y + 6x^2y^3 - 2y^2$

$e)\ 3pq^3 - 8p^4q^3 - 12q^4 - 0.5p^6$ $\qquad f)\ \frac{4m - 2n}{2m - n}$

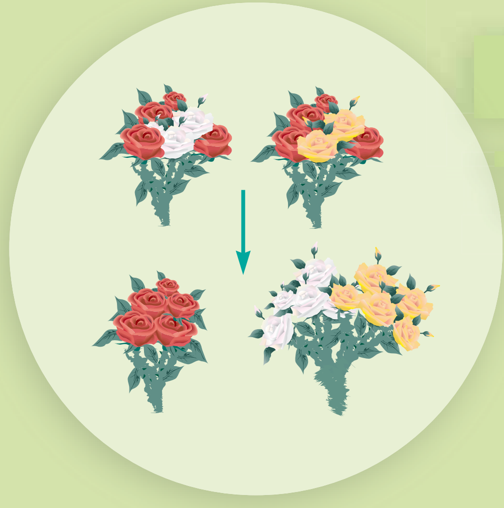
3- د B, A او C په افادوکې ورته حدود وښيي اوافادې ساده کړئ.

$A = 4xy + 2x^2y - 3xy^2 - \sqrt{2}xy - 0.5x^2y - \frac{1}{2}xy^2$

$B = \frac{4}{3}a^2b - a^2 + b^2 - 0.7a^2b - 2a^2 - 3b^2 + xy$

$C = 2\sqrt{8x} + \sqrt{2} - 3\sqrt{8x} + \sqrt{32}$

په فکتورونو تجزيه (فکتور نيونه)



په مخامخ شکل کې څو غونچې ګلونه وينئ؟
کومې غونچې يو بل ته ورته دي؟ يوه غونچه څو ګلانو څخه جوړه ده؟

فعاليت

- تش ځايونه ډک کړئ.

$$5x = (\ldots\ldots + \ldots\ldots)x = \ldots\ldots x + \ldots\ldots\ldots x$$
$$6y = (\ldots\ldots + \ldots\ldots)y = \ldots\ldots y + \ldots\ldots\ldots y$$

- پاسنيو اړيکو کې له کومې ځانګړتيا څخه ګټه اخيستل شوې ده.
- د ښي اړخ عددي ضريبونه د کيڼ اړخ د متحولينو له ضريبونوسره څه اړيکه لري.

$$3x + 2x = (\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots)x = \ldots\ldots\ldots x$$
$$ax + bx = (\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots)x = \ldots\ldots\ldots x$$

- ايا کولای شو چې $a + b$ ساده کړو؟

په پور تنی فعاليت کې ليدل کيږی چې:
د ځينوالجبري افادو په تجزيه کې کولای شوچې د ضرب توزيعي خاصيت څخه پرجمع باندې ګټه واخلو. د ګډعامل په پيژندلوسره په افاده کې کولای شوالجبري افادې تجزيه کړو.

لومړی مثال: لاندې الجبري افادې تجزيه کړئ.

$a)\quad ab + ac - ad$ $\qquad b)\quad x^4 - x^3y + x^2y^2$

$c)\quad \frac{1}{2}m^2 - 2m$ $\qquad d)\quad 3xy - 6x^2$

حل: په راکړل شويوافادوکې لومړی په ټولوحدونوکې ګډ حد پيداکوو او هغه د قوس مخکې ليکو وروسته ټول حدونه بيل بيل په جمله ويشو اوحاصل يې دقوس په منځ کې ليکو:

$a)\ ab+ac-ad = a(b+c-d)$

$b)\ x^4-x^3y+x^2y^2 = x^2(x^2-xy+y^2)$

$c)\ \frac{1}{2}m^2-2m = m(\frac{1}{2}m-2)$

$d)\ 3xy-6x^2 = 3x(y-2x)$

دويم مثال: لاندې الجبري افادې تجزيه کړئ.

$a)\ Ax+Bx+Ay+By$

$b)\ x^2-4y^2+x+2y$

$c)\ 2x^2+2xy+3x+3y$

$d)\ 2x-2y+2x+2y$

حل: لومړی افاده داسې ترتيبوو چې ورته حدونه څنګ پر څنګ راشي او ورسته دافادې ګډ حدود پيداکووا وبيا يې تجزيه کوو.

$$a)\ \underbrace{Ax+Bx}_{x}+\underbrace{Ay+By}_{y}$$
$$= x(A+B)+y(A+B)$$
$$= (A+B)(x+y)$$

$$b)\ x^2-4y^2+x+2y$$
$$= [x^2-(2y)^2]+(x+2y)$$
$$= (x-2y)(x+2y)+(x+2y)$$
$$= (x+2y)(x-2y+1)$$

$$c)\ 2x^2+2xy+3x+3y$$
$$= 2x(x+y)+3(x+y)$$
$$= (x+y)(2x+3)$$

$$d)\ 2x+2y+2x+2y$$
$$= 4x+4y$$
$$= 4(x+y)$$

پوښتنې

لاندې افادې تجزيه کړئ.

1) $x^4-x^3y+x^2x$

2) $x(2x-3y)^2+8(2x-3y)$

3) $10ab-15ac$

4) $32x^2y-4xy^2$

5) $\sqrt{2}x^3y^2-\sqrt{8}xy$

6) $0.5mn^2-0.125m^4n^3$

7) $ab+b+b$

8) $\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{6}x^2-\frac{1}{2}x^2-x^4$

9) $mab+my+ny+nab$

10) $ab(b+a+c)+ac(a+b+c)+bc(c+b+a)$

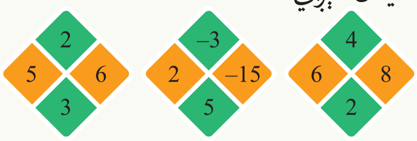
دالجبري افادو ضرب چې يوه گډه جمله ولري

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)\,x + ab$$

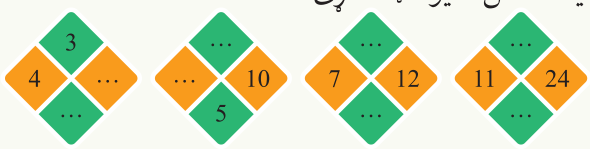
د مخامخ قوسونو له ضرب څخه وواياست چې د دوو عددونو د جمعي او ضرب حاصل له کومو عددونو سره برابر دی.

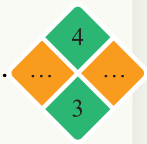
فعالیت

- په هره مربع کې، داعداد و ترمنځ څه ډول اړیکه لیدل کیږي؟

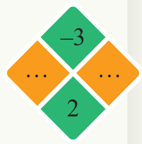


- دیورتنی اړیکي څخه په ګټه اخیستنه تش ځایونه ډک کړئ:



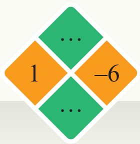


$(x+4)(x+3) = x^2 + ...x + ...x + ... = x^2 ....x + ...$



$(x-3)(x+2) = x^2 + ...x + ...x + ... = x^2 ....x + ...$

$x^2 + 8x + 12 = (x + ...)(x + ...)$



$x^2 + x - 6(x + ...)(x + ...)$

له پورتني فعالیت څخه لیدل کېږي:

د دوو الجبري عبارتونوله ضرب څخه چي یوه ګډه جمله و لري لیکلای شوچي:

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+a\times b$

که چیري وغواړو یوه ترینوم الجبري افاده د x^2+bx+c تجزیه کړونولومړی باید دوه عددونه داسي پیداکړوچي دضرب حاصل یې c اود جمع حاصل یې b شي، که دي اعدادوته m او n وویل شي، لروچي:

$x^2+bx+c=x^2+(m+n)x+m\cdot n$

مثال: د لاندي افادو ضرب اوتجزیه سرته ورسوئ:

$a)\ (t-4)(t+5)$ $b)\ (a+3)(a+4)$ $c)\ (x-0.4)(x+0.2)$

$d)\ (y+\frac{2}{3})(y+\frac{1}{2})$ $e)\ x^2+12x+32$ $f)\ x^2+4x+3$

$g)\ x^2-3x-28$ $h)\ x^2-5x+6$

حل:

$a)\ (t-4)(t+5)=t^2+(-4+5)t+(-4\times 5)=t^2+t-20$

$b)\ (a+3)(a+4)=a^2+(3+4)a+(3\times 4)=a^2+7a+12$

$c)\ (x-4)(x-2)=x^2+(-4-2)x+(-4\times -2)=x^2-6x+8$

$d)\ (y+\frac{2}{3})(y+\frac{1}{2})=y^2+(\frac{1}{2}+\frac{2}{3})y+\frac{2}{6}=y^2+\frac{7}{6}y+\frac{2}{6}$

$e)\ x^2+12x+32=x^2+4x+8x+32=x(x+4)+8(x+4)=(x+8)(x+4)$

$f)\ x^2+4x+3=x^2+3x+x+3=x(x+3)+(x+3)=(x+3)(x+1)$

$g)\ x^2-3x-28=x^2+(4-7)x+(4)(-7)=x^2+4x-7x-28$
$=x(x+4)-7(x+4)=(x-7)(x+4)$

$h)\ x^2-5x+6=x^2-2x-3x+6=x(x-2)-3(x-2)=(x-3)(x-2)$

پوښتني

1- لاندي افادي تجزیه کړئ.

$a)\ x^2+7x+12$ $b)\ m^2-6m-7$

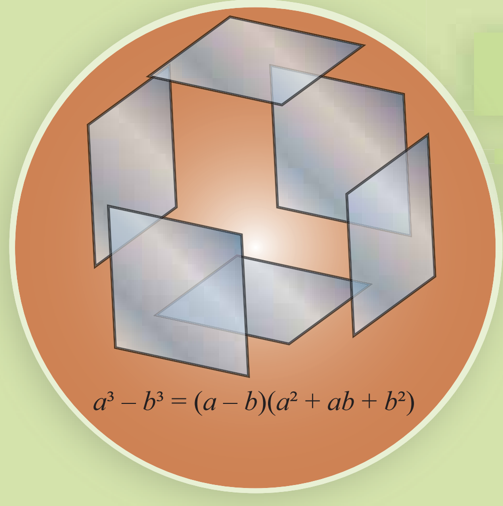
$c)\ a^2+a-2$ $d)\ x^2-x-20$

2- لاندي افادي ضرب کړئ.

$a)\ (2x-1)(x+3)$ $b)\ (\sqrt{2}+x^2)(x-\sqrt{2})$

$c)\ (a-3)(a+4)$ $d)\ (0.5xm-\frac{1}{2})(4xm+0.5)$

د مکعبونو مجموع او تفاضل



شکل ته پام وکړئ، ووایاست چې ددې سطحو څخه که سره نږدې شي، کوم جسم په لاس راځي.

فعالیت

لاندې جدول ډک کړئ:

a	b	$a^3 + b^3$	$(a + b)$	$a^2 - ab + b^2$	$(a + b)(a^2 - ab + b^2)$
5	2				
4	1				
−3	2				
3	−2				
4	4				

- د دوو $a^3 + b^3$ او $(a+b)(a^2 - ab + b^2)$ ولاړو لیکو ترمنځ څه اړیکې لیدل کېږي؟
- ایا کولای شئ یوه ورته رابطه د $a^3 - b^3$ لپاره ولیکئ.

دپورتني فعالیت څخه کولای شو دا پایله ولیکو:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

دا رابطه کولای شو چې په الجبري ډول وښیو:

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a(a^2 - ab + b^2) + b(a^2 - ab + b^2)$$
$$= a^3 - a^2b + ab^2 + ba^2 - ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + b^3$$

لومړی مثال: لاندې الجبري افادې تجزیه کړئ.

$a)\ b^3-8 \qquad b)\ a^6b^6-x^3y^3 \qquad c)\ h^3+\frac{1}{h^3}$

حل: لومړی الجبري افاده د $a^3 \pm b^3$ مطابقت شکل ته اړه وو، وروسته د مطابقت په مرسته هغه تجزیه کوو:

$a)\ b^3-8=b^3-2^3=(b-2)(b^2+2b+4)$

$b)\ a^6b^6-x^3y^3=(a^2b^2)^3-(xy)^3=(a^2b^2-xy)(a^4b^4+a^2b^2xy+x^2y^2)$

$c)\ h^3+\frac{1}{h^3}=h^3+(\frac{1}{h})^3=(h+\frac{1}{h})(h^2-1+\frac{1}{h^2})$

دویم مثال: دیوه مکعب مستطیل حجم داسې $27x^3-\frac{1}{8}$ ښودل شوی دی، که د مکعب مستطیل جګوالی $3x-\frac{1}{2}$ وی ددې مکعب مستطیل دقاعدې مساحت به څومره وي؟

$$\text{د مکعب مستطیل حجم} = \text{د قاعدې مساحت} \times \text{ارتفاع} \Rightarrow \text{د قاعدې مساحت} = \frac{\text{د مکعب مستطیل حجم}}{\text{ارتفاع}}$$

$$\text{د قاعدې مساحت} = \frac{27x^3-\frac{1}{8}}{3x-\frac{1}{2}}=\frac{(3x)^3-(\frac{1}{2})^3}{3x-\frac{1}{2}}=\frac{(3x-\frac{1}{2})[(3x)^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}]}{(3x-\frac{1}{2})}=9x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}$$

دریم مثال : د $\frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}$ افاده ساده کړئ:

حل : لومړی دصورت مطابقت په انکشافي یا غزیدلی بڼه لیکو:

$$\frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x^2+xy+y^2}=x-y$$

څلورم مثال :د $x^3+\frac{2}{x^3}$ افاده تجزیه کړئ:

$$x^3+\frac{2}{x^3}=x^3+\frac{(\sqrt[3]{2})^3}{x^3}=x^3+(\frac{\sqrt[3]{2}}{x})^3$$

$$=(x+\frac{\sqrt[3]{2}}{x})(x^2-\sqrt[3]{2}+\frac{\sqrt[3]{4}}{x^2})$$

پوښتنې

1- د $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ مساوات صحت په الجبري بڼه وښیئ.

2- لاندې افادې تجزیه کړئ.

$a)\ a^6b^6+x^3y^3 \qquad b)\ 8+b^3 \qquad c)\ x^{12}-y^{12}$

$d)\ 125x^3+y^3 \qquad e)\ 0.125x^3-1 \qquad f)\ \frac{1}{x^3}+1$

$g)\ 8-64a^3b^6 \qquad h)\ 8a^3-27b^3 \qquad i)\ b^6-1$

کوچنی ګډ مضرب (L.C.M)

د $\frac{5}{6}+\frac{3}{4}$ د کسرونو په حاصل کې د 6 او 4 د کوچنی ګډ مضرب یا دواړو کسرونو ګډ مخرج پیدا کولو لپاره مو یوه لاره درلوده د $\frac{2}{2x+2}+\frac{3}{x^2-1}$ جمعې د حاصل لپاره څه وړاندیزونه کوئ؟

فعالیت

- د $\frac{2}{8}$ او $\frac{3}{6}$ کسرونو د جمع حاصل لپاره مو لومړی د ٦ او ٨ کوچني ګډ مضرب یا دواړو کسرونو ګډ مخرج پیدا کولو پړاوونه توضیح کړئ.
- د $2x+2$ او x^2-1 افادې په ضربي عواملوتجزیه کړئ.
- ضربي ګډ او ناګډعوامل یې وټاکئ.
- د $2x+2$ او x^2-1 کوچني ګډ مضرب پیدا کولو لپاره سوچ وکړئ څه باید وکړو.
- د $2x+2$ او x^2-1 کوچني ګډ مضرب څودی؟هغه په لاس راوړئ.
- د $\frac{2}{2x+2}+\frac{3}{x^2-1}$ کسرونو د جمع حاصل په لاس راوړئ.

ددوو یاڅو الجبري افادوکوچنی ګډ مضرب دپیداکولولپاره لومړی هغوی په لومړنیو ضربي عواملوتجزیه، وروسته هغه ګډعوامل چې ترټولولوی توان لري د ناګډعواملو سره ضربووچې کوچنی ګډ مضرب په لاس راځي.

لومړی مثال: د $4x^2$، $2x+2$ او x^2-1 کوچنی ګډ مضرب په لاس راوړئ.

حل: لومړی افادې جلاجلا تجزیه کوو

$$4x^2=2^2x^2$$
$$2x+2=2(x+1)$$
$$x^2-1=(x-1)(x+1)$$

لیدل کېږي چې هغه ګډ عامل چې لوی توان لري $(x+2)$ او 2^2 دی، چې د ضرب حاصل یې د ناګډوعواملوسره برابر په $2^2(x+1)(x-1)x^2 = 4x^2(x^2-1)$ دی. چې د کوچني ګډ مضرب یا (L.C.M) په نامه یادېږي.

دویم مثال: د $68x^2+40x+32$ ، $6x^2-6$ او $4x^2+12x-16$ افادوکوچنی ګډ مضرب پیدا کړئ.

$$4x^2+12x-16 = 4(x^2+3x-4) = 2^2(x+4)(x-1)$$
$$8x^2+40x+32 = 8(x^2+5x+4) = 2^3(x+4)(x+1)$$
$$6x^2-6 = 6(x^2-1) = 2\times 3(x-1)(x+1)$$

په پا یله که کوچنی ګډ مضرب عبارت له:

$$2^3\times 3(x+1)(x+4)(x-1)$$

پوښتنې

د کوچني ګډ مضرب په پام کې نیولو سره یې ساده کړئ.

1) $\frac{2x}{3}-\frac{4}{5x}\div\frac{3}{10x}$

2) $\frac{3x-1}{x^2+2x-15}-\frac{2}{x+5}$

3) $\frac{2}{x-1}+\frac{x}{x+1}-\frac{4}{x^2-1}$

4) $\frac{2}{x^2-1}+\frac{3}{x^3-1}+\frac{1}{x+1}$

د الجبري افادو ویش

$$\frac{2xy^2-4x^2y^4}{-2xy^2}=?$$

پام وکړئ چې د مخرج افاده د صورت په کومه افاده پورې اړه لري، کولای شئ هغه ساده کړئ.

فعالیت

- کله چې د $\frac{995}{7}$ کسر نور ونشو کړای ساده یا اختصار کړو؛ نو پایله څه ده؟
- لاندې الجبري افادې ترممکن حده پورې ساده کړئ.

$a)\ \frac{2m^2y-3x^3y^4+24xy^3}{-3xy^2}\ ,\ x\neq 0\wedge y\neq 0$

$b)\ \frac{x^2-5x+6}{x-2}\ ,\ x\neq 2$

$c)\ \frac{x^3-x^2-x-6}{x+2}\ ,\ x\neq -2$

- لاندې عملیوته پاملرنه وکړئ او توضیح کړئ چې هرګام دکوم کاربه پایله کې لاس ته راځي ولې؟

$a)$

$$\begin{array}{r|l} 995 & 7 \\ \underline{-7} & 142 \\ 29 & \\ \underline{28} & \\ 15 & \\ \underline{14} & \\ 1 & \end{array}$$

$b)$

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x^2-11x-6 & x+2 \\ \underline{\pm x^3 \pm 2x^2} & x^2-4x-3 \\ -4x^2-11x & \\ \underline{\mp 4x^2 \mp 8x} & \\ -3x-6 & \\ \underline{\mp 3x \mp 6} & \\ 0 & \end{array}$$

- د (a) په جزء کې موولي ویش دکینې خوا له لومړي رقم ۹ څخه پیل کړ؟ سوچ وکړئ په (b) جزء کې مو ولې له x^3 څخه د ویش عملیه پیل کړې ده؟

ليکل اوترتيبول د يوې الجبري افادې دکېڼ لورې (خوا) نه ښي لورې (خوا) ته په ترتيب د لوېې درجې څخه کوچنې درجې ته د پولينوم نزولي ترتيب نومېږي

ددوو الجبري افادو يو پربل د ويش لپاره لاندې پړاوونه ترسره کړئ.

۱- د مقسوم او مقسوم عليه پولينومونه په نزولي ډول ترتيب کړئ.

۲- د مقسوم لومړی حد د مقسوم عليه په لومړي حد وويشئ چې حاصل يې د خارج قسمت لومړی حد دی.

۳- په لاس راغلی خارج قسمت د مقسوم عليه په ټولو حدونو کې ضرب حاصل يې د مقسوم له ورته حدودونه تفريق کوو.

٤- د مقسوم بل حد راښکته کوود پاتې افادې څنګ ته يې ليکو وروسته ددې افادې لومړی حد د مقسوم عليه په لومړي حد ويشو او حاصل يې د مقسوم عليه په ټولو حدودو کې ضربوو او حاصل يې له پاتې افادې څخه تفريق کوو.

٥- وروسته ۲، ۳، ٤ پړاوونو ته رهغه ادامه ورکووچې د پاتې حدودو درجه د مقسوم عليه د حدونو له درجې څخه کوچنۍ شي.

لومړی مثال : د $x^3-3x^2-23x+30$ افاده په $x-6$ افاده ويشئ.

$$\begin{array}{r|l} x^3-3x^2-23x+30 & x-6 \\ \hline \underline{-x^3\mp 6x^2} & x^2+3x-5 \\ 3x^2-23x & \\ \underline{-3x^2\mp 18x} & \\ -5x+30 & \\ \underline{\mp 5x\pm 30} & \\ 0 & \end{array}$$

د تقسيم مراحل

$$\left.\begin{array}{l} I-\quad \dfrac{x^3}{x}=x^2 \\ II-\quad \dfrac{3x^2}{x}=3x \\ III-\quad \dfrac{-5x}{x}=-5 \end{array}\right\}$$

دويم مثال: د $x^5-2x^3+x^2-8x+4$ افاده په x^2-x-4 افادې وويشئ.

حل : دمقسوم اومقسوم عليه پولينومونه په نزولي ډول ترتيبوواوبيا عمليه سرته رسوو.

$$
\begin{array}{r|l}
x^5+0.x^4-2x^3+x^2-8x+4 & x^2-x-4 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^5\mp x^4\mp 4x^3} \qquad\qquad\qquad & x^3+x^2+3x+8 \\
x^4+2x^3+x^2 \qquad\quad & \\
\underline{-x^4\mp x^3\mp 4x^2} \qquad\quad & \\
3x^3+5x^2-8x \quad & \\
\underline{-3x^3\mp 3x^2\mp 12x} \quad & \\
8x^2+4x+4 & \\
\underline{-8x^2\mp 8x\mp 32} & \\
12x+36 &
\end{array}
$$

د تقسيم مراحل

$$
\left.
\begin{array}{l}
I - \quad \dfrac{x^5}{x^2}=x^3 \\
II - \quad \dfrac{x^4}{x^2}=x^2 \\
III - \quad \dfrac{3x^3}{x^2}= 3x \\
IV - \quad \dfrac{8x^2}{x^2}=8
\end{array}
\right\}
$$

څرنګه چې د دوو عددونو ويش دسموالي لپاره مودوه شرطونو څېړل، نو د دوو الجبري افادو د ويش دسموالی لپاره هم دوه شرطونه څېړو.

1- د خارج قسمت اومقسوم عليه د ضرب حاصل جمع پاتې د مقسوم دالجبري افادې سره بايد برابره وي.

۲- د پاتې درجه د مقسوم عليه له درجې څخه بايد کوچنی وي.

لکه په دويم مثال کې:

$$(x^2-x-4)(x^3+x^2+3x+8)+12x+36$$
$$=x^5-2x^3-8x+4$$

ليدل کېږي چې د خارج قسمت او مقسوم عليه د ضرب حاصل جمع پاتې د مقسوم له افادې سره برابر دی او د خارج قسمت درجه نظر x ته له ۲ سره برابره ده پاتې درجه (۱) ده نو په لاس راغلی پايله سمه ده.

دریم مثال: د $2x^2 + x^4 - 3x + 1$ افاده په $x + 3$ افاده وویشئ:

حل: لومړی دمقسوم اومقسوم علیه افادې په نزولي ډول ترتیبوو.

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 + 0\cdot x^3 + 2x^2 - 3x + 1 & x + 3 \\ \cline{2-2}
-x^4 \pm 3x^3 & x^3 - 3x^2 + 11x - 36 \\ \cline{1-1}
\quad -3x^3 + 2x^2 & \\
\quad \mp 3x^3 \mp 9x^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad 11x^2 - 3x & \\
\qquad \pm 11x^2 \pm 33x & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad -36x + 1 & \\
\qquad\quad \mp 36x \mp 108 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 109 &
\end{array}
$$

پوښتنې

د لاندې افادو د ویش حاصل پیدا کړئ.

1) $(2t^3 - 4t^2 - 2t - 6) \div (t^2 + 9t + 7)$

2) $(1 - x^2 - x) \div (1 - x)$

3) $(2y^3 + y - 3y) \div (y^2 - 3y - 1)$

4) $(2x^3 + 5x^2 - x - 1) \div (x + 3)$

د الجبري افادو د عمليو سر ته رسولو ترتيب

که چيرې په الجبري افادو کې مخامخ نښې راغلې وي په څه ډول په ترتيب سره افاده ساده کوو؟

فعاليت

- دلاندې افادو ساده کولو لپاره کومې عمليې سرته ورسوو. د عمليې د سرته رسولو ترتيب په شمير سره ونوموئ.

$3-2^4\times5+(16\div4)$

$4\times5\div2-3(2+3^2)+2$

$3x^2-4x(2+x)$

$2x-3\{-2(x+1)(x+2)\}+6x\div2$

په پورتنۍ فعاليت کې موولیدل چې دالجبري افادوعمليو په ترتيب سره سرته رسول دعددونو قانون له ترتيب څخه پيروي کوي. ديوې الجبرى افادې د ساده کولو لپاره په ترتيب سره په لاندې ډول عمل کوو

1- توان رفع کوو.

۲- د قوسونو په لرلو سره لومړی هغه ساده کوو.

۳- په ترتيب سره له کيڼ څخه ښي اړخ ته د ضرب او ويش عمليې سرته رسوو.

٤- په ترتيب سره له کيڼ څخه ښي اړخ ته د جمع او تفريق عمليې سرته رسوو.

لومړی مثال : لاندې افادې ساده کړئ.

$$1)\ \frac{1}{2}m-3\left\{\left[5(m-\frac{1}{2}-m)\right]-m-6\right\}\div 2$$
$$=\frac{1}{2}m-3\left\{5m-\frac{5}{2}-5m-m-6\right\}\div 2$$
$$=\frac{1}{2}m-3\left\{-m-\frac{17}{2}\right\}\div 2$$
$$=\frac{1}{2}m+(3m+\frac{51}{2})\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}m+\frac{3}{2}m+\frac{51}{4}$$
$$=\frac{m+3m}{2}+\frac{51}{4}=\frac{4m}{2}+\frac{51}{4}$$
$$=2m+\frac{51}{4}$$

$$2)\ 2x-1-\{-2(x+2)\}+2x\div 2\times 5x$$
$$=2x-1-(-2x-4)+2x\div 2\times 5x$$
$$=2x-1+2x+4+x\times 5x$$
$$=2x-1+2x+4+5x^2$$
$$=4x+5x^2+3$$

فعاليت

- مخامخ عبارتونه ساده کړئ:

$a)\ \sqrt[3]{\frac{5}{8}}$

$b)\ \sqrt{8x^3y^3}$

$c)\ \sqrt{3a\sqrt{49a^2}}$

- د $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ او $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ کسرونو دمخرج د جذرونو منځه ورلو لپاره چې مخرج گویا شي $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ او $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ دکوم مطابقت څخه مرسته اخیستلای شئ.
- د $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ او $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ کسرونوجذرونه په مخرج له منځه یوسي اوساده يې کړئ.

ديوکسر د مخرج د جذرونو د منځه ورلوعمليه د الجبري کسر دگويا کولو يا ناطق کولو په نامه يادېږي.

مثال : لاندې کسرونو مخرج ناطق کړئ

1) $\frac{2}{\sqrt{x}}$ 2) $\frac{2}{\sqrt[3]{a}}$

3) $\frac{a-1}{\sqrt{a}-1}$ 4) $\frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

حل:

1) $$\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}}=\frac{2\sqrt{x}}{x}$$

2) $$\frac{2}{\sqrt[3]{a}}=\frac{2}{\sqrt[3]{a}}\times\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2}}=\frac{2\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^3}}=\frac{2\sqrt[3]{a^2}}{a}$$

3) $$\frac{a-1}{\sqrt{a}-1}=\frac{a-1}{\sqrt{a}-1}\times\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+1}=\frac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a})^2-1^2}=\frac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{a-1}=\sqrt{a}+1$$

4) $$\frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2-3}=\frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{-1}=-5(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

د يوې الجبري افادې د ساده کولو لپاره په ترتیب سره لومړی قوسونه له منځ څخه ورو، وروسته د توان عملیه او په پای کې په ترتیب سره د ویش، ضرب، جمع او تفریق عملیې له بنې څخه کیڼ اړخ ته سر ته رسوو.

- د $\sqrt{x}$ د ناطق کولو عامل $\sqrt{x}$ دی.
- د $\sqrt{x}+1$ د ناطق کولو عامل $\sqrt{x}-1$ دی.
- د $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ د ناطق کولو عامل $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ دی.

پوښتنې

لاندې افادې ساده کړئ.

1) $2x\times -2\{3x-(2+x)-1\}\div 2$

2) $\frac{1}{3}y-5\left\{-2\left[6(y-\frac{1}{3}-y\right]\right\}\div 3$

3) $5+(-18)-[24+(-30)]\times(-7)$

4) $[(-102)+(-330)]\div 16+[168+240-(-210)]\div 6$

5) $\frac{2}{\sqrt{7}}$

6) $\frac{3}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

7) $2\sqrt{2000ab}-\frac{b}{a}\sqrt{72ab}$

8) $\frac{2a}{\sqrt{a}}$

9) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

10) $2\sqrt{18x}+\sqrt{50x}-\frac{1}{2}\sqrt{20x}$

11) $(\sqrt{2}+1)(1-\sqrt{2})$

دپنځم څپرکی لنډيز

- هغه الجبري افادې چې د يوه حد څخه جوړه شوي وي دمونوم يا يو حده په نامه يادېږي
لکه: ax^n
- هغه الجبري افاده چې له دوو حدونو څخه جوړه شوې وي، دوه حده يا بينوم بلل کېږي،
لکه: ax^2+b
- هغه الجبري افاده چې له دريو حدونو څخه جوړه شوې وي، دري حده يا ترينوم بلل کېږي،
لکه: ax^2+bx+c
- هغه الجبري افادې چې له څوحدونوڅخه جوړې شوې وي او د تورو توانونه ئې مکمل عدونه وي څوحده يا پولينوم بلل کېږي
لکه: $ax^5+bx^3+cx^2-x-d$
- په يوه الجبري افاده کې د متحول ترټولو لوی توان دالجبري افادې درجه بلل کېږي.
- د پولينوم هغه ترتيب چې دکينې خوا څخه ښی خواته له لوی توان څخه کوچني ته ترتيب شوی وي، نزولي ترتيب بلل کېږي.
- دهر a او b لپاره لرو:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

- دالجبري افادودګډوعواملوچې ترټولولوی توان ولري دضرب حاصل له ناګډوعواملوسره د L.C.M په نامه يادېږي.
- که چيرې په يوه الجبري افاده کې قوسونه او(+ ، - ، × او ÷ ...) عمليې راغلي وي دساده کولولپاره يې په ترتيب سره لومړی کوچنی، منځنی او بيا لوی قوس له منځه وړو وريسې د توان عمليه او په پای کې په ترتيب سره د وېش، ضرب جمع او تفريق عمليې له کيڼ څخه ښي اړخ ته سرته رسوو.
- د $\sqrt{x}$ د ناطق کول عامل $\sqrt{x}$ دی.
- د $\sqrt{x}+1$ د ناطق کولوعامل $\sqrt{x}-1$ دی.
- د $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ د ناطق کولوعامل عبارت له $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ دی.

دپنځم څپرکی پوښتنې

- په لاندې سوالونوکې هرسوال ته څلورځوابونه ورکړل شوی سم ځواب يې وټاکئ.

1- د $2x^2-\frac{1}{2}x$ افاده کې ګډ عامل :

a) 2 دی.　　b) x دی.　　c) $2x$ دی.　　d) نه لري.

2- د $(x-2)(x+3)$ الجبري افادودضرب حاصل عبارت له:

a) x^2+5x+6　　b) x^2-5x-6

c) x^2+x-6　　d) x^2-x+6

3- د $\frac{3}{x^2-1}+\frac{3}{2x+2}$ افادې کوچنی ګډ مضرب عبارت له :

a: $2(x+1)(x-1)$　　b) $(x+1)(x-1)$

c) $(2x+2)(x^2-1)$　　d) هيڅ يو.

4- د $\frac{2x-4x^3+x^2+16x-8}{2x^2-8}$ افادې دويش حاصل عبارت له:

a) $-2x+1$　　b) $(-2x+1)(2x)+\frac{-2x}{2x^2-8}$

c) الف او ب　　d) هيڅ يو.

5- د $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ د ناطق کولوعامل عبارت له :

a) $\sqrt{a}$　　b) $\sqrt{b}$

c) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$　　d) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

• تش ځایونه په مناسبو جملو ډک کړئ.

۱- د $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1$ الجبري افاده یوه . . . . حده درجه . . . . افاده ده.

۲- د $x^2 + 7x + 12$ الجبري افادې ضربی عوامل . . . . .او. . . . . . . .دی.

۳- د $\frac{x^2-1}{x+1}$ ویش حاصل عبارت له . . . . دی.

٤- $a^3 + b^3 =$ (. . . . .)(. . . . .)

٥- د $(x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)$ دضرب حاصل عبارت له . . . . دی.

• په لاندې جملو کې کومه یوه سمه اوکومه یوه ناسمه ده، د سمې مخ ته (س) توری اوناسمې مخ ته (ن) توری ولیکئ

۱- (   ) هغه الجبري افادې چې دځو حدونوڅخه جوړه شوې وي، د پولینوم په نامه یادېږي.

۲- (   ) د $x^2 + 2ax + a^2$ افادې تجزیه $(x+a)$ $(x+a)$ ده

۳- (   ) د $21x^3y^3$ او $14x^3y^2$ کوچنی ګډ مضرب $42x^3y^4$ دی.

4- (   ) $a^3 - b^3 = (a+b)(a^2+ab+b^2)$

5- (   ) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

• لاندې سوالونه مفصل حل کړئ

۱- تجزیه يې کړئ

$a)\ y^2 - y - 2$

$b)\ a^2 - b^2 + 2bc - c^2$

$c)\ 21a - 14ab + 28a^2$

$d)\ 72m^8n^6 - 98m^6n^8$

$e)\ a^2x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}$

$f)\ 1 + 2ab - (a^2 + b^2)$

2- ساده يې کړئ

$a)\ \frac{x-1}{x-2} - \frac{x+1}{x-2} + \frac{1}{x^2-4}$

$b)\ \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$

$c)\ \frac{a^2b^{-2} - b^2a^{-2}}{ab^{-1} - ba^{-1}}$

3- و يې ویشئ

$a)\ \frac{12a^2 - 4a + 20}{40 - 5a}$

$b)\ \frac{a^4 - b^4}{a - b}$

$c)\ 2x^3 - x^2 - 4 \div (x - \frac{1}{2})$

$d)\ (x^3 - 5x + 6) \div (x - 2)$

$e)\ x^2 - 5x + 64 \div (-x + 5)$

شپږم څپرکی

غیر مساوات

غیر مساوات
Inequality

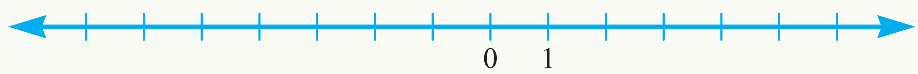
تله په کوم حالت کې قرار لري؟ ولې؟

عموماً په ورځني ژوند کې د غیر مساوي کمیتونو پرتله کولو ته اړتیا لرو، لکه د یوه ټولګي د زده کوونکو د نمرو مجموع له زیاتو څخه کمو نمرو ته درجه بندي کړو، ایا تاسې کولی شئ داسې نور مثالونه په ورځني ژوند کې وښیې چې نا مساوي عددونه سره پرتله شي.

که چیرې عدوونه دي($<,\leq,>,\geq$) علامو په مرسته اړیکې ولري د نامساوي په نامه یادیږي
لکه: $5>4$, $-3<2$ ...

فعالیت

- د $3, \frac{-3}{2}, \sqrt{2}, -4$ او $\frac{2}{3}$ عددونه د عددونو په محورو وټاکئ.



- له مناسبو علامو څخه په کار اخیستلو، پورتني عددونه په ترتیب سره له کوچني څخه تر لوی پورې ولیکئ.
- د اعدادو په محور د اعدادو د ترتیب او د اعدادو د ځای تر منځ څه اړیکې وینئ؟

د پورتنی فعالیت مشاهدات په لاندې ډول داسې لنډوو:

د عددونو په محور هغه عدد چې د عدد ښی خواته پروت وي، لوی او له هغه عدد څخه چې د هغې کیڼې خوا ته پروت دی کوچنی دی.

په بشپړ(کلي) ډول ویلی شو چې که د b,a او c دري حقیقي عددونه وي، نو لیکلای شو، چې:

$$a<b\ ,\ b<c \quad \Rightarrow \quad a<c$$

فعالیت

- دوه غیر مساوي عددونه وټاکئ او دهغوی تر منځ اړیکه د کوچنی یا لویې علامو په کار اخیستلو بیان کړئ.
- د غیر مساوي دواړو خواوو ته د ۵ عدد ورجمع کړئ، ایا د غیر مساوي د علامې په لوري کې څه بدلون راځي؟
- د پورتنی غیر مساوي له دواړو خواوو څخه د ۳ عدد تفریق کړئ، ایا د غیر مساوي د علامې په جهت کې څه بدلون راځي؟

په بشپړ ډول سره د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

که $a<b$ وي نو د b,a او c اختیاري حقیقي عددونو لپاره لرو:

$$a+c<b+c$$
$$a-c<b-c$$

فعالیت

- دوه نامساوي عددونه وټاکئ او دهغوی تر منځ اړیکه د کوچنی یا لویې علامې(>) څخه په کار اخیستلو ولیکئ.
- د پورتنی غیر مساوي دواړه خواوې د ٤ په عدد کې ضرب کړئ، ایا د غیر مساوات د علامې په جهت کې څه بدلون راځي؟
- د پورتنی غیر مساوات دواړه خواوې د ٤- په عدد کې ضرب کړی، ایا د غیر مساوات د علامې په جهت کې څه بدلون راځي؟
- که د $4<7$ غیر مساوات دواړه خواوې معکوس کړو، ایا د غیر مساوات د علامې په جهت کې بدلون راځي.

په بشپړ ډول د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

د b,a او c حقیقي عددونو لپاره لرو چې:

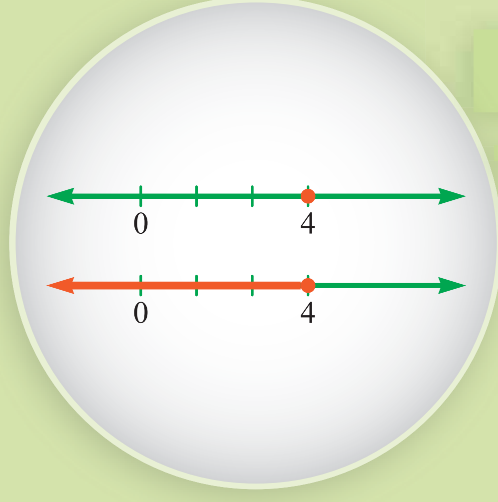
$$a<b \quad , \quad 0<c \Rightarrow ac<bc$$
$$a<b \quad , \quad c<0 \Rightarrow ac>bc$$
$$0<a<b \quad \Rightarrow \frac{1}{b}<\frac{1}{a}$$

په یاد ولرئ چې د ویش عملیه د ضرب د عملیې معکوسه عملیه ده، یعنې که وغواړو چې یو عدد په a وویشو هغه عدد په $\frac{1}{a}$ کې ضربوو نو د غیر مساوات د ضرب د عملیې ټول خواص د ویش په عملیه کې هم حقیقت لري.

پوښتنې

د $9>3-$ په نا مساوي کې د یو اختیاري عدد په جمع او تفریق کولو سره د غیر مساوات ټول خواص وخیړئ.

د لومړۍ درجه خطي غیر مساوات حل



د $x = 4$ او $x \leq 4$ دوه الجبري جملې په پام کې ونیسئ.
د دې عبارتونو تر منځ څه ورته والی او څه توپیر وینئ.

فعالیت

- د $x+3=7$ معادله، د x د کوم عددي قیمت لپاره سمه ده.
- آیا د x په لاس راغلی قیمت څخه پرته بل قیمت x ته پیداکولای شئ چې په معادله کې ربنتینوالي ولري؟
- د x د کوم عددي قیمت لپاره د $x+3<7$ نامساوي سمه ده.
- ایا د x په لاس راغلی قیمت څخه پرته، بل قیمت شته چې غیر مساوات صدق پرې وکړي.

- د x د څو عددي قیمتونو لپاره پورتنۍ غیر مساوات صدق کوي.

د پورتنۍ فعالیت په لیدو سره نامساوي د مساوات په پرتله ډېر حلونه لري.
هغه الجبري رابطې چې د$(>,<,\leq$ او $\geq)$ علامو په مرسته یو له بل سره اړیکې ولري او په هغه کې د متحول توان یو وي د لومړۍ درجه یو مجهوله یا خطي نامساوي بلل کیږي.
لاندې نامساوي د یو مجهوله لومړۍ درجې نامساواتو بېلګه ده.

$$x+3<0 \quad , \quad 2x-\frac{1}{3}>3-x$$

$$6x+7\leq 5 \quad , \quad \frac{x}{5}+\sqrt{2}\geq 12$$

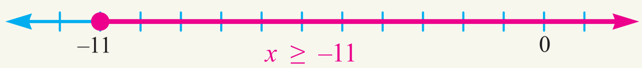
په بشپړ ډول د x د هغو قیمتونو پیدا کولو لپاره چې په غیر مساوات کې حقیقت ولري د غیرمساواتو د خواصو څخه په ګټه اخیستنې سره غیر مساوات ته داسې بدلون ورکوو چې د غیر مساوات یو اړخ ته x او بل اړخ ته یې عددونه پراته وي.
د غیر مساوات د حل څخه موخه دا ده چې د x لپاره هغه قیمتونه پیدا کړو چې غیر مساوات په ساحه کې حقیقت ولري دا ساحه د غیر مساوات د حل ساحه بلل کېږي.

لومړی مثال: د $x+4 \geq -7$ غیر مساوات حل کړئ او د غیر مساوات د حل ساحه یې د عددونو په محور وښیئ.

حل: د نامساوي په دواړو خواوو کې د(-4) عدد په جمع کولو سره لرو چې:

$$x+4-4 \geq -7-4$$

$$x \geq -11$$



دویم مثال: د $2x+1>5$ نامساوي حل کړئ.

حل: د غیر مساوات له خواصو څخه په ګټه اخیستنې سره کولای شو چې معلوم د غیرمساوات علامې یو اړخ ته او مجهول بل اړخ ته نقل کړو:

$$2x+1>5$$

د نامساوي له دواړو خواوو څخه د(-1) عدد تفریق کوو:

$$2x+1-1>5-1$$

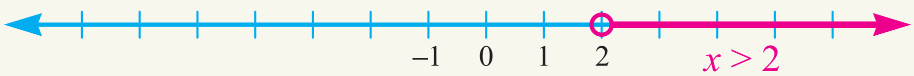
$$2x>4$$

د نامساوي دواړه خواوې په 2 ویشو یا په $\frac{1}{2}$ کې یې ضربوو:

$$\frac{1}{2}\times(2x)>\frac{1}{2}\times 4$$

$$x>2$$

یعنې د ټولو هغو قیمتو لپاره چې له 2 څخه لوی وي غیر مساوات صدق کوي دا مطلب د



عددونو په محور داسې ښودلای شو.

پوښتنه: سوچ وکړئ چې ولې په لومړي مثال کې د عددونو په محور 11- په(●) او دويم مثال کې د عددونو په محور 2 په(o) ښودل شوی دی؟

په دې دوو مثالونو کې هغو علامو ته چې د غيرمساوات د حل ساحې ټاکلو لپاره پکار وړل شوی پاملرنه وکړئ.

په عمومي حالت کې د $ax+b<cx+d$ الجبري عبارت چې په هغه کې a, b, c او d حقيقي عددونه او x متحول وي، لومړي درجه يو مجهوله يا خطي غيرمساوات بلل کېږي.

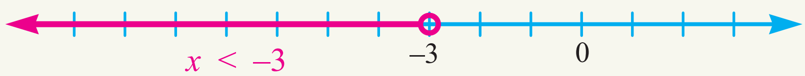
د غيرمساوات د حل لپاره لاندې ټکي په پام کې نيسو:

- د غيرمساوات د خواصو په پام کې نيولو سره معلوم يو اړخ او مجهول د غيرمساوات بل اړخ ته انتقالوو.
- معلوم عددونه په خپل منځ کې او مجهول حدونه خپل منځ کې جمع کوو.
- د متحول د عددي قيمت د پيدا کولو لپاره د غيرمساوات دواړه خواوې د متحول په ضريب د غيرمساوات د خواصو په پام کې نيولو سره وېشو.

دريم مثال: د $3x+1<x-5$ نامساوي حل کړئ.

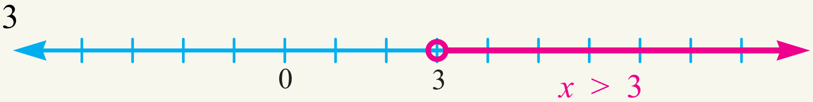
حل:

$$3x-x<-5-1$$
$$2x<-6$$
$$x<-\frac{6}{2}$$
$$x<-3$$



څلورم مثال: لاندې غيرمساوات حل کړئ.

$$x+5<3x-1$$
$$x-3x<-1-5$$
$$-2x<-6$$
$$\frac{-2x}{-2}>\frac{-6}{-2}$$
$$x>3$$



پوښتنې

1- د لاندې غیرمساواتو حل پیدا او د هغوی دحل ساحه د عددونو په محور وښیئ:

$a)\ 4x \geq 8$

$b)\ 8 + x < 5$

$c)\ 5 + x < 2x - 1$

$d)\ -3x - 4 > x + 7$

$e)\ \frac{3}{2}x - 1 > x - \frac{2}{3}$

$f)\ 0.5 - x < 3x - 1$

$g)\ 2 - x \leq 2$

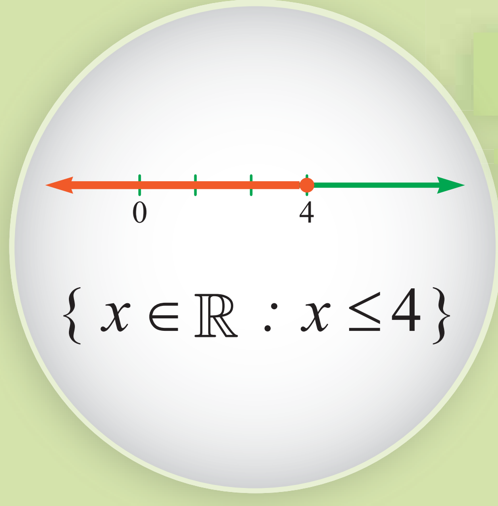
$h)\ 2x - 5 - 7x > 0$

$i)\ 5x + 6 > 0$

2- د 1325 د ویش پر 25 باید تر ټولو لوی عدد پیدا کړو، چې په 25 کې ضرب او له 1325 څخه کوچنی یا ورسره مساوي شي، دا عبارت په غیرمساوات وښیئ او خارج قسمت یې پیدا کړئ.

3- که تاسې ته وویل شي چې د یوه فعالیت د سرته رسولو لپاره حد اکثر 5 ورځې وخت لرئ دا عبارت په غیرمساوات وښیئ.

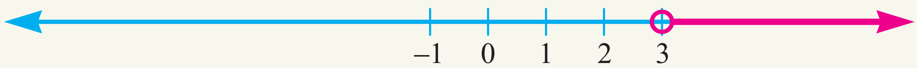
فاصلې (انټروالونه)



د غیرمساوات د حل لپاره ډېر عددونه کولی شو په لاس راوړو چې دغه غیرمساوات حل وي، داسې ټول حقیقي عددونه که د یو سېټ په ډول په پام کې ونیسو، دې سېټ ته د غیرمساوات حل وایي.

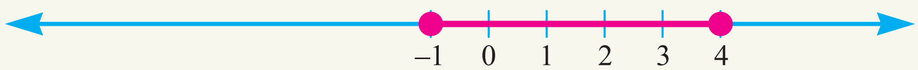
د مثال په ډول $x > 3$ د $3x - 2 > 7$ نامساوي د حل سټ دی، ځکه هر هغه عدد چې له 3 څخه لوی وي په نوموړې نامساوي کې صدق کوي، دا د حل سټ د ریاضي په ژبه داسې ښودل کېږي: $\{x \in IR : x > 3\}$

داسې لوستل کېږي: د x ټول هغه حقیقي عددونه چې له دریو(3) څخه لوی وي.



لیدل کېږي، چې د عددونو دا سېټ د عددونو د محور یوه برخه ده، چې په ریاضي کې ورته واټن(فاصله) یا انټروال وایي.

په لاندې شکل کې د عددونو په محور ټاکل شوې هغه فاصله(انټروال) ده، چې له 1- څخه لوی یا ورسره مساوي او له 4 څخه کوچنی یا ورسره مساوي دی.

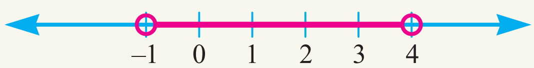


دا فاصله په $[-1,4]$ یا $\{x \in R : -1 \leq x \leq 4\}$ سره ښودل کېږي.

پاملرنه وکړئ چې د -1 او 4 عددونه په فاصله کې ګډون لري. په هغه حالت کې چې د انټروال د پیل او پای ټکي په کې ګډون ولري، دې واټن یا فاصلې ته تړلې فاصله وایي.

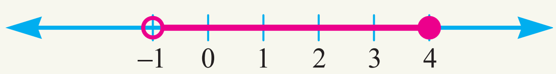
نو که په پورتنۍ فاصله کې د 1- او 4 ټکي ګډون و نلري دې فاصلې ته خلاص واټن یا فاصله وایي او په لاندې ډول یې ښودلای شو:

$(-1,4)=\{x \in IR : -1 < x < 4\}$



که د مخکنۍ فاصلې د پای د ټکو څخه یوازې یو ټکی لکه 4 په فاصله کې شامل وي، هغې فاصلې یا واټن ته نیمه خلاصه یا نیمه تړلې واټن یا فاصله وایي، او هغه په لاندې شکل ښیو:

$(-1,4]=\{x \in IR : -1 < x \le 4\}$



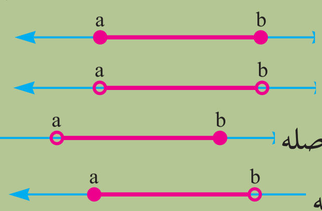
په عمومي ډول د هرو دوو a او b حقیقي عددونو چې $a \le b$ څخه وي لرو:

د a او b تړلې فاصله $[a,b]=\{x\in IR : a \le x \le b\}$

د a او b خلاصه فاصله $(a,b)=\{x\in IR : a < x < b\}$

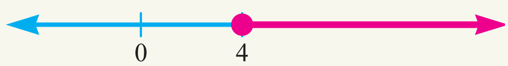
د a او b نیمه خلاصه فاصله $(a,b]=\{x\in IR : a < x \le b\}$

د a او b نیمه تړلې فاصله $[a,b)=\{x\in IR : a \le x < b\}$



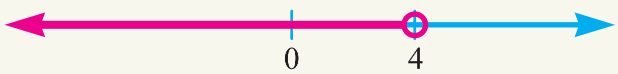
پاملرنه وکړئ چې د عددونو په محور باندې کولی شو هغه فاصلې په پام کې ونیسو چې له یوې خوا څخه تړلې نه وي، په دې حالت کې فاصله یا واټن د ∞ علامې څخه په ګټه اخیستنه چې هغه بې نهایت لولو ښیو، لکه د هغو عددونو سټ چې د 4 څخه لوی یا ورسره مساوي وي داسې ښیو:

$\{x\in IR : 4 \le x\}=[4,\infty)$



او هغه عددونه چې له 4 څخه کوچني وي، عبارت دی له:

$\{x \in IR : 4 > x\} = (-\infty,4)$



نو په عمومي ډول که a یو حقیقي عدد وي نو لرو چې:

د a څخه لوی حقیقي عددونه $(a,\infty)=\{x\in IR : a < x\}$

د a څخه لوی یا ورسره مساوي حقیقي عددونه $[a,\infty)=\{x\in IR : a \le x\}$

د a څخه کوچنی حقیقي عددونه وي. $(-\infty,a)=\{x\in IR : x < a\}$

د a څخه کوچنی یا ورسره مساوي حقیقي عددونه. $(-\infty,a]=\{x\in IR : x \le a\}$

پوښتني

1- لاندې انټروالونه د سټ په شکل ولیکئ او د عددونو په محور یې وښیئ

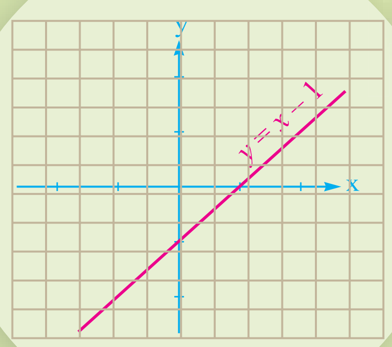
1) $[5,7]$ 2) $(9,-3)$ 3) $[-2,8)$ 4) $(6,1]$ 5) $[2,\infty)$

2- لاندې سټونه د انټروال په ډول ولیکئ:

1) $A=\{x \in IR : 2 < x < 6\}$ 2) $B=\{x \in IR : -3 \le x \le 5\}$

3) $C=\{x \in IR : 0 \le x < 4\}$

د لومړۍ درجې دوه حده (بینوم) د علامې ټاکل



په مخامخ شکل کې x د کوم قیمت لپاره د $y = x - 1$ مستقیم خط د x د محور څخه د پاسه او د x د کوم قیمت لپاره مستقیم خط د x محور نه لاندې پروت وي.

فعالیت

- د $2x-4$ الجبري افاده څو حده ده؟
- دا افاده د x متحول په کوم قیمت مساوي له صفر سره ده؟
- دا افاده د x متحول په کومو قیمتونو سره مثبت ده؟
- دا افاده د x متحول په کومو قیمتونو سره منفي ده؟

د پورتنی فعالیت ریاضي بیان په لاندې ډول په جدول کې لنډوو:

x	$x<2$	2	$x>2$
$2x-4$	$-$	0	$+$

په دې جدول کې لیدل کیږي چې د $2x-4$ بینوم په $x=2$ کې مساوي په صفر دی او د هغو قیمتونو لپاره چې له 2 نه کوچني وي منفي علامه او په هغو قیمتونو کې چې له 2 نه لوی وي بینوم مثبته علامه لري.

لومړی مثال: د $P(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ بینوم علامه وټاکئ.

حل: لومړی هغه قیمت پیداکوو چې بینوم په هغې کې صفر وي.

$$-\frac{1}{2}x+3=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{2}x=-3 \quad \Rightarrow \quad x=6$$

وروسته هغه قیمتونه چې بینوم په هغې کې مثبت وي، په لاس راوړو:

$$-\frac{1}{2}x+3>0 \Rightarrow \frac{-1}{2}x>-3 \Rightarrow x<6$$

په همدې ترتیب هغه قیمتونه چې بینوم په هغې کې منفي وي عبارت دی له:

$$-\frac{1}{2}x+3<0 \Rightarrow \frac{-1}{2}x<-3 \Rightarrow x>6$$

په لاس راغلی پایلې لاندې جدول کې راټولوو:

x	$x<6$	6	$x>6$
$-\frac{1}{2}x+3$	$+$	0	$-$

یادونه: په عمومي ډول د $ax+b$ بینوم د علامې د ټاکلو لپاره لومړی هغه قیمت په لاس راوړو چې بینوم په هغې کې صفر کیږي او د علامې د ټاکلو جدول یې په لاندې ډول دی.

1- $a>0$

x	$x<-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}<x$
$ax+b$	a ته مخالفه علامه	0	a سره ورته علامه

2- $a<0$

x	$x<-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}<x$
$ax+b$	د a مطابقه علامه	0	د a مخالفه علامه

پوښتنې

د لاندې الجبري افادو علامې وټاکئ:

1) $3x-9$ 2) $7x-2$ 3) $\frac{3}{4}x-1$

4) $0.5x+10$ 5) $2x-4+x-1$ 6) $\frac{1}{2}x+3$

د کسري افادو د علامو تحلیل او ټاکل

د a، b حقیقي عددونو لپاره د $\frac{a}{b}$ کسر، څه وخت مثبت او څه وخت منفي علامه لري.

$$\frac{?}{?} = +$$

$$\frac{?}{?} = -$$

فعالیت

- د $\frac{3x+5}{2x-2}$ کسري افاده په پام کې ونیسئ.
- پورتنۍ افاده په کوم حالت کې مثبت کیږي.
- پورتنۍ افاده په کوم حالت کې منفي کیږي.
- د x په کوم قیمت سره د پورتني کسري افاده مساوي په صفر ده.
- ایا کولای شئ په نوموړي افاده کې د x په ځای (۱) وضع کړئ. ولې؟

د نوموړي افادې د صورت او مخرج د علامې د ټاکلو څخه وروسته کولای شو د نوموړي کسري افادې علامه د صورت او مخرج د علامو د ویش له حاصل څخه په لاس راوړو:

$$3x+5=0 \Rightarrow x=\frac{-5}{3}$$

پوهیږو چې د $x<\frac{-5}{3}$ لپاره د بینوم د صورت علامه منفي او د $x>\frac{-5}{3}$ لپاره د بینوم د صورت علامه مثبت ده.

د مخرج د علامې د ټاکلو لپاره لومړی هغه قیمت پیداکوو، چې $2x-2$ په هغه کې صفر شي.

$$2x-2=0 \Rightarrow x=1$$

په پایله کې د $x<1$ څخه بینوم د مخرج علامه منفي او د $x>1$ لپاره د بینوم د مخرج علامه مثبت ده.

پاملرنه وکړی په هغه قیمت کې چې د کسري افادې مخرج صفر کېږي نه دی تعریف شوی، پورتنی بحث په لاندې ډول د علامو د تحلیل او ټاکلو په جدول کې داسې لنډوو:

x	$x<-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}<x<1$	1	$1<x$
$3x+5$	$-$	0	$+$		$+$
$2x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{3x+5}{2x-2}$	$+$	0	$-$	نه دی تعریف شوی	$+$

نو د $x<\frac{-5}{3}$ او $x>1$ قیمتونو لپاره د $\frac{3x+5}{2x-2}$ کسري افادې اشاره مثبت او د $\frac{-5}{3}<x<1$ قیمتونو لپاره د $\frac{3x+5}{2x-2}$ کسر افادې اشاره منفي ده.

او د $x=\frac{-5}{3}$ قیمت لپاره کسري افاده مساوي صفر ده.

په عمومي ډول د کسري افادې د اشارې د تحلیل او ټاکلو لپاره لومړی د کسر د صورت او مخرج اشاره ټاکو وروسته د صورت او مخرج د اشارو او د ویش د حاصل څخه د کسري افادې اشاره په لاس راوړو.

مثال: د $\frac{-x+3}{x}$ کسري افادې اشاره وټاکئ.

حل:

$$-x+3=0 \quad \Rightarrow x=3$$

$$x=0$$

x		0		3	
$-x+3$	$+$		$+$	0	$-$
x	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{-x+3}{x}$	$-$	نه دی تعریف شوی	$+$	0	$-$

پوښتنې

د لاندې کسري افادو اشاره وټاکئ.

a) $\frac{-x+1}{5+x}$ b) $\frac{x}{x+1}$ c) $\frac{1}{x}+\frac{2}{7}$

کسري غیرمساوات

$$y = \frac{x+1}{x}$$

$y > 0$

$y < 0$?

د x په کوم قیمت سره د مخامخ کسري افاده مثبت او د x په کوم قیمت سره افاده منفي ده؟

فعالیت

د $\frac{x-2}{4+2x} > 0$ کسري غیرمساوات په پام کې ونیسئ.

- د پورتنی نامساوي د رښتینوالی لپاره د کسري افادې صورت او مخرج باید کومه علامه ولري؟
- د x متحول د کوم قیمتونو لپاره د پورتني کسري افادې صورت مثبت دی؟
- د x متحول د کوم قیمتونو لپاره د پورتني کسري افادې مخرج مثبت دی؟
- د x متحول د کوم قیمتونو لپاره د پورتني کسري افادې صورت منفي دی؟
- د x متحول د کوم قیمتونو لپاره د پورتني کسري افادې مخرج منفي دی؟
- د پورتني فعالیت د لاس ته راغلو پایلو په پام کې نیولو سره د x متحول د کومو قیمتونو لپاره د $\frac{x-2}{4+2x} > 0$ غیرمساوات سم دی؟

د پورتني فعالیت د سرته رسولو څخه ولیدل شول چې د $\frac{x-2}{4+2x} > 0$ غیرمساوات د حل لپاره باید بېلابېل حالتونه په پام کې ونیسو. د کسري نامساواتو د حل د سټ پیدا کولو یوه بله لاره د علامو د ټاکلو او تحلیل جدول دی. د مثال په ډول د $\frac{x-2}{4+2x} > 0$ غیرمساوات د حل سټ پیدا کولو لپاره داسې عمل کوو:

$$x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

$$4 + 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2$$

x		-2		2	
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$4+2x$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x-2}{4+2x}$	$+$ د نامساوي حل	نه دی تعریف شوی	$-$	0	$+$ د نامساوي حل

د علامو د تحليل او ټاکلو جدول ته په پاملرنې سره ليدل کېږي، چې هغه قيمتونه چې له (-2) ($x<-2$) او له (2) ($x>2$) وي افاده مثبته ده، او دهغو قيمتونو څخه چې له (-2) څخه لوی او له (2) کوچنی ($-2<x<2$) وي منفي ده. په پايله کې د غيرمساوات د حل سټ عبارت له $x<-2$ او د $x>2$ يا $\{x\in R : x<-2\}\cup\{x\in R : x>2\}$ يا $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$

مثال: د $\frac{2x}{5x+3}\geq 1$ کسري غيرمساوات حل کړئ.

حل: د غيرمساوات د حل سټ پيداکولو لپاره لومړی کسري افاده يو وار د صفر څخه کوچنی يا لويه ليکو:

$$\frac{2x}{5x+3}\geq 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{2x}{5x+3}-1\geq 0$$

$$\frac{2x-(5x+3)}{5x+3}\geq 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{-3x-3}{5x+3}\geq 0$$

$$-3x-3=0\Rightarrow x=-1$$

$$5x+3=0 \quad\Rightarrow x=\frac{-3}{5}$$

اوس د غيرمساوات د علامې د ټاکلو له جدول څخه د غيرمساوات حل په لاس راورو.

x		-1		$-\frac{3}{5}$	
$-3x-3$	$+$	0	$-$		$-$
$5x+3$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{-3x-3}{5x+3}$	$-$	0	$+$ د نامساوي حل	نه دی تعریف شوی	$-$

له پورتنی جدول په پاملرنې سره د غيرمساوات حل عبارت دی له: $\{x\in IR : -1\leq x<\frac{-3}{5}\}$

په بشپړ ډول د کسري نامساوي د حل لپاره په لاندې ډول پر مخ ځو:

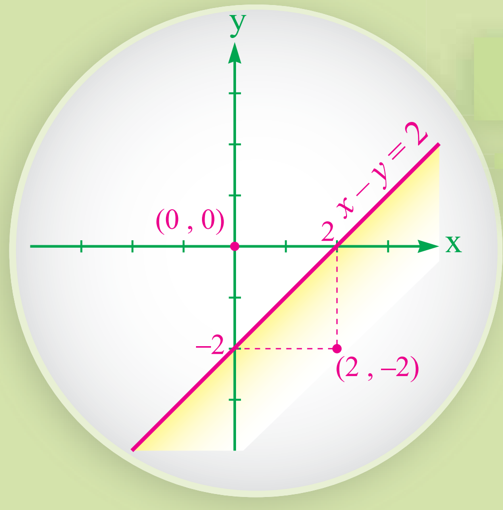
- غيرمساوات داسې ليکو چې له صفر څخه کوچنی يا لويه وي.
- غيرمساوات د علامو د ټاکلو له جدول څخه د غيرمساوات د حل سټ په لاس راورو.

پوښتنې

د لاندې غيرمساواتو د حل سټ پيدا کړئ.

1) $\frac{-x-9}{2x+4}<0$ 2) $\frac{6x+7}{7-6x}\leq 0$ 3) $\frac{x+10}{2x-3}\geq 0$ 4) $\frac{7x-2}{3-2x}>3$

خطي دوه متحوله غیرمساوات



د $x-y=2$ مستقیم خط د وضعیه کمیاتو مستوي په دوه پاسني او لاندیني ناحیو ویشي.
د کومې ناحیې د ټکو مختصات په $x-y<2$ غیرمساوات کې صدق کوي.

د $x-y<2$ نامساوي چې په هغه کې د x او y متحولین لومړۍ درجه دي یو خطي دوه متحوله غیرمساوات بلل کېږي.

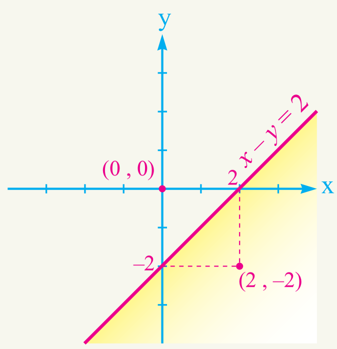
فعالیت

- د (x,y) مرتبې جوړې داسې په لاس راوړئ چې په $x-y<2$ غیرمساوات کې صدق وکړي.
- څومره مرتبې جوړې پیدا کولای شئ چې په پورتنی غیرمساوات کې حقیقت ولري.

- ایا کولای شئ چې نورې مرتبې جوړې پیدا کړئ چې په پورتني غیرمساوات کې صدق وکړي.

په پورتنیو حالاتو کې ویلای شو چې:

د $ax+by<c$ نامساوي چې په هغه کې b,a او c حقیقي عددونه او $a\neq0$ یا $b\neq0$ وي خطي دوه متحوله غیرمساوات بلل کېږي.
د دې غیرمساوات د حل سټ د هغو عددونو مرتبې جوړې دي چې په نامساوي کې صدق کوي.



لومړی مثال: د $x-y<2$ دوه متحوله غیرمساوات د حل سټ پیدا کړئ.

حل: د دې غیرمساوات د حل لپاره لومړی $x-y=2$ کرښه د وضعیه کمیاتو په مستوي کې رسموو. لیدل کېږي چې د $x-y=2$ مستقیمه کرښه د وضعیه کمیاتو مستوي په

دوو ناحيو ويشي د دې لپاره چې و پوهېږو د کومې ناحيې د عددونو مرتبې جوړې په غيرمساوات کې صدق کوي له هرې ناحيې څخه يوه مرتبه جوړه ټاکو او په غيرمساوات کې يې وضع کوو.

د مثال په ډول $(0,0)$ مرتبه جوړه په غيرمساوات کې صحيح دی.

$$0-0<2 \quad \Rightarrow \quad 0<2$$

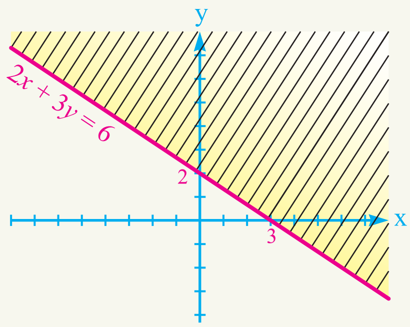
نو هغه ټکی چې د مستقيمی کرښې پورته خوا ته دی د غيرمساوات حل دی.

د غيرمساوات د حل سټ د ښودلو لپاره هغه اړخ د مستقيمی کرښې تورو چې په غيرمساوات کې سم والی نه لري.

پوښتنه: ځو نور ټکی د مستقيمې کرښې څخه پورته او ښکته خواته وټاکی پورتنی پايله وڅيړئ.

دويم مثال: د $2x+3y<6$ نامساوي د حل سټ پيدا کړئ.

حل: لومړی د $2x+3y<6$ کرښه د وضعيه کمياتو په مستوي کې رسموو وروسته د غيرمساوات د حل سټ پيدا کولو لپاره د مستقيم د پاسه يا ښکته خوا د يوه ټکی مختصات ټاکو او په غيرمساوات کې يې وضع کوو که حقيقت يې درلود هغه اړخ د غيرمساوات حل دی او بل عکس نه دی.



لکه د $(0,0)$ د وضعيه کمياتو مبدا مرتبه جوړه په پام کې نيسو:

$$2x+3y<6$$
$$2\times(0)+3\times(0)<6$$
$$0<6$$

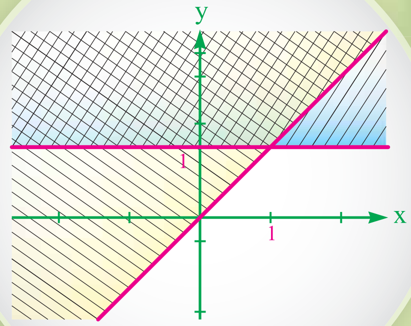
څرنګه چې نوموړی ټکی مختصات په غيرمساوات کې حقيقت لري نو د کرښې لاندې خوا ټکي د غيرمساوات د حل سټ دی.

پوښتنې

1) $3x-2<5x+y$ 2) $2y<3x$ 3) $x+y>0$

4) $2x-6y\geq 8x+4y$ 5) $x+y<0$ 6) $5x-3y<-1$

د دوه متحوله خطي غیرمساواتو سیستمونه



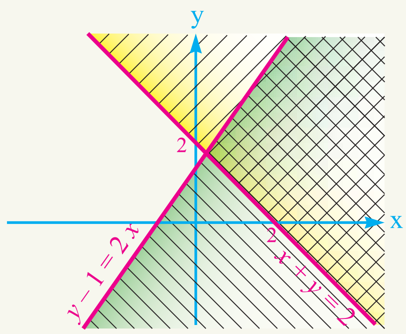
د لاندې غیرمساواتو د حل سټ پیدا کړئ.
ایا کولای شئ اټکل وکړئ چې مخامخ شکل د کومو نامساواتو د حل ساحه راښیي.

د $\begin{cases} x+y<2 \\ y-1>2x \end{cases}$ د غیرمساواتو سیستم چې په هغه کې دوه خطي دوه متحوله غیرمساوات دي د غیرمساوات سیستم بلل کېږي.

د غیرمساواتو سیستم له حل څخه مطلب دا دی چې هغه مرتبې جوړې پیدا کړو چې په یوه وخت کې په دواړو غیرمساواتو کې صدق وکړي.

لومړی د هر یوه نامساوي حل د وضعیه کمیاتو په مستوي کې په لاس راوړو.

هغه ناحیه چې ګډه نه ده خط، خط شوی د غیرمساوات همزمان د حل په سټ کې ګډون لري او دا ناحیه د غیرمساوات د سیستم حل دی.



د $x+y=2$ کرښې د رسمولو لپاره که $x=0$ وي $y=2$ او که $y=0$ وي نو $x=2$ کېږي او د $y-1=2x$ کرښه کې که $x=0$ وي $y=1$ او که $y=0$ وي نو $x=\frac{-1}{2}$ سره کېږي.

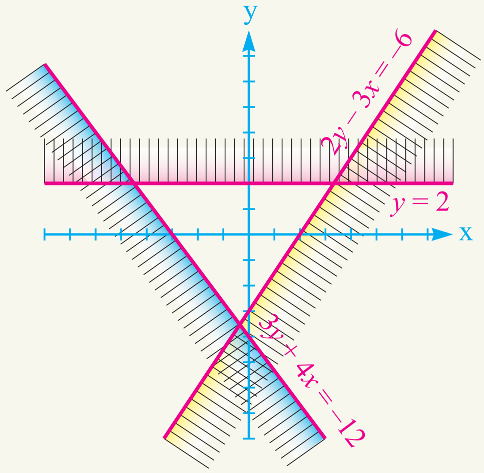
د دوه متحوله خطي غیرمساوات د سیستم د حل لپاره داسې عمل کوو:
لومړی د هر یوه دوه متحوله خطي نامساوي د سیستم حل د وضعیه کمیاتو په مستوي کې ټاکو.
هغه ناحیه چې په یوه وخت کې د دواړو غیرمساواتو د حل د سټ یوه برخه وي د سیستم حل دی.

مثال: د لاندې غیرمساواتو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} 2y-3x>-6 \\ y-2<0 \\ 3y+4x>-12 \end{cases}$$

حل: لومړی د پورتني غیرمساوات هره یوه کرښه رسموو یعنې:

$2y-3x=-6$ ، $y-2=0$ او $3y+4x=-12$



د $2y-3x=-6$ رسمولو لپاره که $x=0$ وي $y=-3$ او د $y-2=0$ گراف لپاره که $x=0$ وي $y=2$ کېږي او د $3y+4x=-12$ کرښې د رسمولو لپاره که $x=0$ وي $y=-4$ کېږي چې د نوموړو قیمتونو په مرسته یې گراف په مخامخ بڼه رسموو.

وروسته د هرې یوې غیرمساوات د حل ساحه په بیل بیل ډول ټاکو.
د ورکړل شوو نامساواتو سیستم د حل سټ په شکل کې نه دي تورې شوې ناحیې په شکل لیدل کېږي.

پوښتنې

د لاندې سیستمونو د حل سټ د گراف په مرسته په لاس راوړئ.

1) $\begin{cases} x<3 \\ 2x+y<4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+3y<9 \\ 5x-2y>5 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x<3 \\ y>2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x-3y<-3 \\ 5x-2y>9 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x+y<4 \\ x-y<3 \\ 5x-y>1 \end{cases}$

د شپږم څپرکي لنډیز

- که چیرې عددونه د دې علامو ($<, \leq, >, \geq$) په مرسته یو له بل سره اړیکه ولري د غیرمساوات په نامه یادېږي.
- که د یوه غیرمساوات دواړو خواوو ته یو حقیقي عدد ور جمع یا تفریق کړو په نامساوي کې بدلون نه راځي.
- که د یوه غیرمساوات دواړه خواوې په یوه مثبت حقیقي عدد د صفر خلاف ضرب یا تقسیم شي په نامساوي کې بدلون نه راځي.
- که د یوه غیرمساوات دواړه خواوې په یوه منفي حقیقي عدد د صفر خلاف ضرب یا وویشل شي د غیرمساوات لورې بدلون کوي.

تړلی انتروال	$[a,b]=\{x\in IR : a \leq x \leq b\}$
خلاص انتروال	$(a,b)=\{x\in IR : a < x < b\}$
نیمه خلاص انتروال	$(a,b]=\{x\in IR : a < x \leq b\}$
نیمه تړلی انتروال	$[a,b)=\{x\in IR : a \leq x < b\}$

- د یوې کسري افادې د علامې د ټاکلو لپاره لومړی د صورت او مخرج علامه بېله بېله ټاکو وروسته د علامو د ویش حاصل په لاس راوړو.
- د $x+3 \leq 5$ دوه متحوله خطي غیرمساوات د سیستم د حل لپاره داسې عمل کوو.

لومړی د هر دوه متحوله خطي غیرمساوات د سیستم حل د وضعیه کمیاتو په مستوي کې ټاکو. هغه ناحیه چې په یوه وخت کې د دواړو غیرمساواتو د حل د سټ یوه برخه وي د سیستم حل

دی.

• په لاندې سوالونو کې د هر سوال لپاره څلور ځوابه ورکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ.

1- د لاندې نامساواتو څخه کوم يو سم دی:

$a)\ \frac{1}{2}+\frac{3}{6}\le 2-\frac{1}{3}$ $b)\ \frac{3}{2}>\sqrt{2}$ $c)\ \sqrt{9+16}\ge 5$ $d)$

د b,a او c ځوابونه

2- د $x+3\le 5$ نامساوي د حل ست عبارت دی له:

$a)\ \{x\in IR: x\le 2\}$ $b)\ \{x\in IR: 2\le x\}$

$c)\ \{x\in IR: x\le 8\}$ $d)\ \{x\in IR: x<-2\}$

3- د لاندې انټروالونو څخه کوم يو د $2x+3>1$ نامساوات د حل ست دی.

$a)\ [-2,\infty)$ $b)\ (2,\infty)$ $c)\ (-1,\infty)$ $d)\ (-2,\infty)$

4- که $0<a<b$ وي د لاندې اړيکو څخه کومه يوه سمه ده.

$a)\ \frac{1}{b}<\frac{1}{a}$ $b)\ \frac{-1}{b}<\frac{-1}{a}$ $c)\ -b<-a$ $d)$ جواب‌های b,a و c

5- د لاندې انټروالونو څخه کوم يو د $\frac{x+3}{3-x}>0$ نامساوي د حل ست دی.

$a)\ (-3,3)$ $b)\ (-\infty,3)$ $c)\ (-3,\infty)$ $d)\ (-3,3]$

• تش ځايونه په مناسبو کلمو سره ډک کړئ.

1- د $ax+by<0$ نامساوات کې د ټولو هغه .... ستې چې په نامساوات کې صدق وکړي د پورتنی نامساوات د حل ست بلل کېږي.

۲- د $[4,5]$ انټروال د .... په نامه يادېږي.

۳- د $2x+4$ بينوم د .... قيمتونو لپاره يادېږي.

٤- د $-x+\frac{1}{2}$ بينوم د .... قيمتونولپاره مثبت کېږي.

۵- د $\frac{1}{5}-x \geq 2x+5$ نامساوي د حل سټ عبارت دی له ....

• د لاندې جملو څخه کومه یوه سمه د هغې په مخ کې د(س) توري او د ناسمې په مخ کې د(ن) توري ولیکئ.

1- (   ) د یوې غیرمساوات د حل سټ یو عنصر لري.

۲- (   ) د $\{x \in R : 2 \leq x < 5\}$ یو تړلی انتروال دی.

۳- (   ) د غیرمساواتو د سیستم د حل سټ د وضعیه کمیاتو د مستوي یوه برخه ده.

٤- (   ) د خطي غیرمساوات د حل ستونه بې شمیره دی.

۵- (   ) څرنگه چې $-2 < 3$ څخه دی نو له دې څایه دا پایله $-\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$ اخیستلای شو.

• لاندې پوښتنې په بشپړ ډول حل کړئ:

1- د لاندې غیرمساوات گانو حل په لاس راوړئ.

$a)\ \frac{x-5}{4} - \frac{x-8}{3} < 0$

$b)\ x-2 < 3(2x-9)$

$c)\ (x-3)(x+3) < 0$

$d)\ \frac{3x+4}{x} - 1 < 0$

$e)\ 1 - \frac{2}{x} \leq 3$

2- لاندې انتروالونه د عددونو پر محور وښیئ.

$a)\ [-1,2]$ $b)\ (-2,1]$ $c)\ [-1,1)$ $d)\ (-2,2)$

3- د لاندې عددونو سټونه د انټروال په بڼه وليکئ او د عددونو پر محور يې وښيئ.

$a)\ \{x \in IR : x \leq 2\}$ $\qquad$ $b)\ \{x \in IR : x \leq 5\}$

$a)\ \{x \in IR : -1 \leq x \leq 6\}$ $\qquad$ $d)\ \{x \in IR : -4 < x < 2\}$

4- د لاندې غيرمساوات د سيستم حل پيدا کړئ:

$a)\ \begin{cases} y > x \\ 3y < 2 \end{cases}$

$b)\ \begin{cases} 2x - y > 0 \\ x - 2y < 0 \end{cases}$

$c)\ \begin{cases} x + y < 2 \\ y - 4 > 2x \end{cases}$

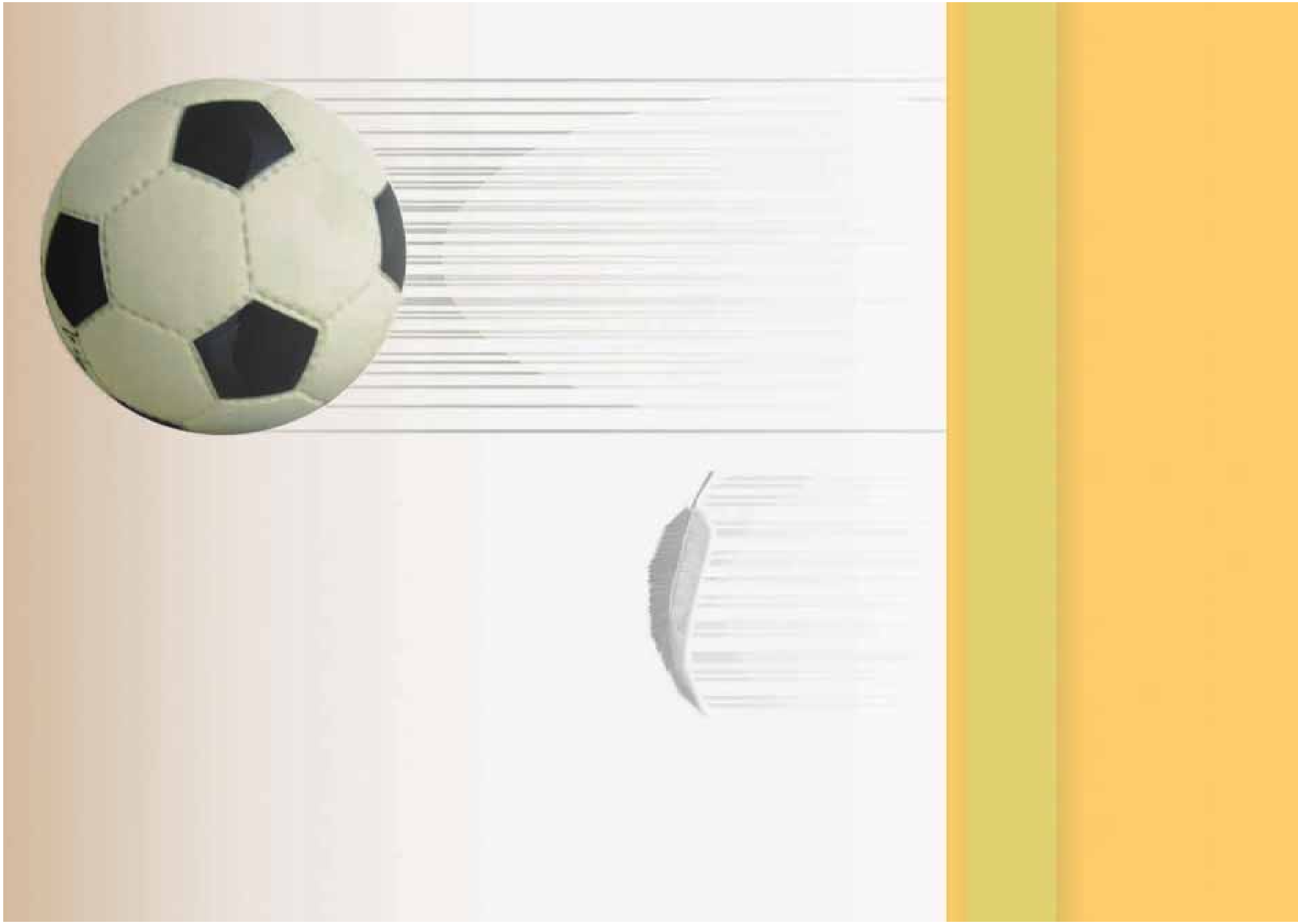
$d)\ \begin{cases} 2x + 2y < 8 \\ 3x - 3y < 9 \\ 10x - 2y > 2 \end{cases}$

$e)\ \begin{cases} y > 2 \\ x > -3 \\ y + x < 0 \end{cases}$

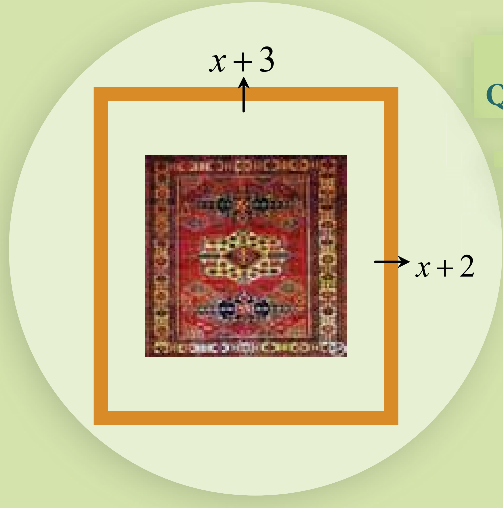
$f)\ \begin{cases} y < 2 \\ x < -3 \\ y + x > 0 \end{cases}$

اووم څپــــرکی

دویمه درجه یو مجهوله معادله



دویمه درجه یو مجهوله معادلې
Quadratic Equation



کــه چیرې یــوه کوټه د یوې مربع شــکلې قالین په واســطه داســې فرش شې چې د کوټــې اوږدوالی $3m$ او ســـور یې $2m$ په اندازه د قالین د څنډې څخه زیاد وي، لکــه مخامخ شــکل، وواياســت چې د کوټې مساحت څومره دی؟

فعالیت

- الجبري افاده تعریف کړئ.
- معادله تعریف کړئ.
- د یو مجهوله لومړی درجې معادلې یوه بېلګه ولیکئ.
- د یو مجهوله لومړی درجې معادلې عمومي شکل ولیکئ.
- د $(x-2)(x+3)=0$ معادلې د قوسونو د ضرب حاصل پیدا کړئ.
- د پورتني معادلې درجه د $x+4=3x-1$ معادلې له درجې سره پرتله کړئ.

هغه معادلې چې یو مجهول ولري او د هغې درجه دوه وي یو مجهوله دویمه درجه معادله بلل کېږي، چې عمومي شکل یې $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ چې b, a او c حقیقي اعداد او x مجهول بلل کېږي که چیرې $b=0$ یا $c=0$ وي په دې حالت کې دې ډول معادلې ته نیمګړې دویمه درجه معادله وايي.

لومړی مثال: یو تار چې یو متر اوږدوالی لري غواړو د هغې څخه یو مستطیل چې مساحت یې $600cm^2$ دی جوړ کړو د دې مستطیل اوږدوالی او سور څرنګه وټاکو.

حل: که دمستطیل اوږدوالی x او سورېې په y وښیو دمستطیل محیط $2(x+y)=100\ldots\ I$ اړیکې او مساحت یې $x\times y=600\ldots II$ اړیکې څخه په لاس راوړو.

$$\begin{cases}2(x+y)=100 \\ x\cdot y=600\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+y=50 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ \mathrm{I} \\ x\cdot y=600 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ \mathrm{II}\end{cases}$$

د I معادلې څخه د y قیمت د x له جنسه په لاس راوړو او په II معادله کې وضع کوو:

$$\begin{cases}2(x+y)=100\\ x\cdot y=600\end{cases} \Rightarrow x(50-x)=600$$

$$50x-x^2=600$$

څرنګه چې په پورتنی معادله کې د x درجه دوه ده نو نوموړې معادله دویمه درجه ده د معادلو د حلونو پیداکولو لپاره بیلابیلې لارې شته چې هغه تر څېړنې لاندې نیسو.

دویم مثال: هغه عدد په لاس راوړئ چې مربع یې د 6 په اندازه له خپل عدد څخه زیاته وي.

حل: که چیرې عدد په x ونوموو؛ نو پورتنی بیان د ریاضي په بنه داسې لیکو:

$x^2=6+x$ یا $x^2-x-6=0$

د دې ډول معادلو حل به په راتلونکي لوست کې وڅیړو.

دریم مثال: په لاندې معادلو کې د عمومي شـکل له مخې د b, a او c ضریبونو قیمتونه ولیکئ.

حل:

$a)\ 2x^2-4x+1=0$ $\quad b)\ 3x-x^2=4$ $\quad c)\ 4x^2-1=0$

$d)\ 7x^2=49$ $\quad e)\ x^2-4=0$ $\quad f)\ \frac{3}{4}-x^2=\frac{2}{3}x$

جزء	معادلې	د a ضریب	د b ضریب	د c ضریب
a	$2x^2-4x+1=0$	2	–4	1
b	$3x-x^2=4$	–1	3	–4
c	$4x^2-1=0$	4	0	–1
d	$7x^2=49$	7	0	–49

پوښتنې

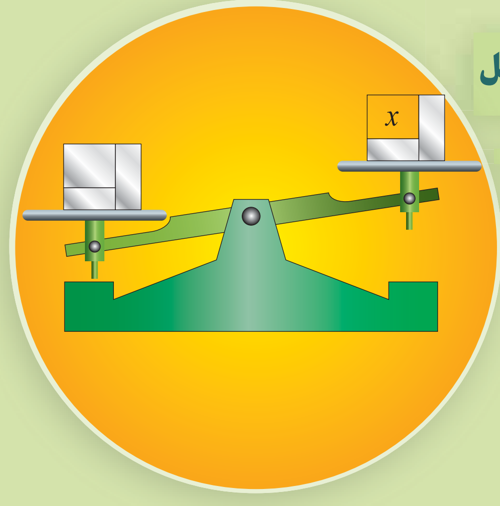
1 - په لاندې معادلو کې مکملې او نیمګړې دوهم درجه یو مجهوله معادلې په ګوته کړئ.

$a)\ 6-2x+x^2=0$ $\quad b)\ 5x^2-3x+1$ $\quad c)\ \sqrt{2}x^2-4x=0$ $\quad d)\ -x^2=3$

2- په لاندې معادلو کې د a، b او c ضریبونه وښیئ.

$a)\ 6x^2-4x=2$ $\quad b)\ 3x-4=x^2$ $\quad c)\ 4x-x^2-6=4x^2$

د دويمه درجه يو مجهوله معادلې حل



آيا کولای شي چې د x لپاره داسې قيمت پيدا کړئ چې تله په تعادل کې راشي.

فعاليت

- د $2x + 4 = 3x - 1$ معادلې حل پيدا کړئ.
- پورتني مساوات د x د بيلابيلو قيمتونو لپاره په مخامخ جدول کې وڅيړئ.

x	$2x+4$	$3x-1$
-3		
-2		
0		
5		

- د جدول او پاسنې پوښتنې په پام کې نيولو سره توضيح ورکړئ چې د معادلې د حلولو پيدا کول يعنې څه؟
- مخامخ جدول پوره او د هغې له مخې د $x^2 - 4x + 3 = 0$ معادلې حلونه په لاس راوړئ.

x	$x^2 - 4x + 3$
-3	
-2	
-1	
0	
1	

هغه قيمتونه چې په يوه دويمه درجه معادله کې برابروالي راولي د يو مجهوله دويمې درجې معادلې حل بلل کيږي.

لومړی مثال: هغه عدد پيدا کړئ چې مربع يې د 12 واحدو په اندازه له عدد څخه ډيره وي.

حل: که چيرې عدد ته x ووايو نو الجبري عبارت داسې بڼه نيسي:

$$x^2 = x + 12$$

څرنګه کولای شو چې د پورتني مساوات څخه د هغې حل پيدا کړو.

که چیرې $x = 1$ په معادله کې وضع کړو نو لیدل کېږي، چې د مساوات ښی اړخ د 13 عدد او کیڼ اړخ ته یې د 1 عدد په لاس راځي. په معادله کې د $x = 2$ قیمت په وضع کولو سره لیدل کېږي، چې د مساوات ښی اړخ ته 14 او کیڼ اړخ ته یې د 4 عدد په لاس راځي او د $x = 3$ په وضع کولو سره لیدل کېږي چې ښی اړخ ته د 15 عدد او کیڼ اړخ ته د 9 عدد دی.

په همدې ترتیب د نورو قیمتونو په وضع کولو سره لکه $x = 4$ لیدل کېږي، چې د مساوات ښی اړخ ته د 16 عدد او کیڼ اړخ ته هم 16 عدد په لاس راځي لیدل کېږي، چې د 16=16 مساوي کېږي نو $x = 4$ د معادلې یو حل دی.

x	x^2	$x+12$
1	1	13
2	4	14
3	9	15
4	16	16

د پورتنی لارې لنډیز چې د معادلې حل د پیدا کولو لپاره مو ترې ګټه واخیسته کولای شو په مخامخ جدول کې داسې ولیکو.

ایا کولای شو چې د دویمې درجې معادله د حل لپاره یوه بشپړه لاره پیدا کړو.

دویم مثال: هغه عدد په لاس راوړئ، چې د هغې د مربع جمع د 1 سره مساوي په صفر شي.

حل: د پاسني بیان الجبري افاده عبارت ده له: $x^2 + 1 = 0$

x	x^2	-1
1	1	-1
2	4	-1
0	0	-1
-1	1	-1
-2	4	-1
-3	9	-1

د پورتنی لارې په څېر د اټکل شویو اعداد په وضع کولو سره د معادلې د حل په لټولو پیل کوو او پر مخ ځو، د دې کار لپاره د پورتنی جدول په څېر مخامخ جدول په پام کې نیسو.

د دې جدول څخه لیدل کېږي چې نشو کولای تعادل برقرار کړو یعني د x لپاره داسې قیمت نشو پیدا کولای، چې د معادلې دواړې خواوې مساوي کړي. له بلې خوا د معادلې څخه څرګندیږي هر کله چې یو عدد مربع کړو او یو ورسره جمع کړو هیڅ وخت مساوي په صفر نشي کېدلای؛ نو دا دویمه درجه معادله حل نه لري.

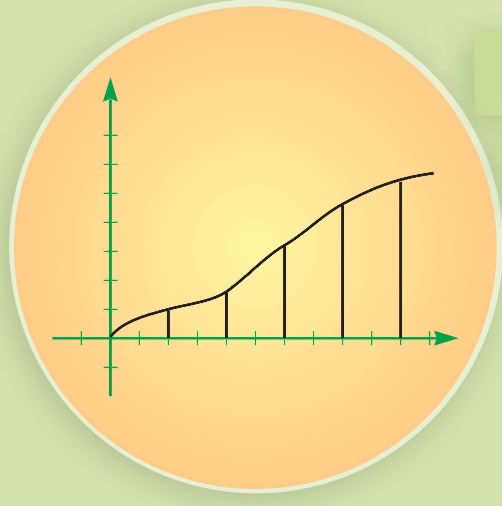
پوښتنې

1- یوه دویمه درجه یو مجهوله معادله ولیکئ چې حل و نه لري.

2- لاندې معادلې حل کړئ.

$a)\ x^2 - 1 = 0 \qquad b)\ x^2 = 0$

غیر خطي اړیکی(رابطي)



ډاکټران د یوه ماشوم د ونې(قد)اوږدوالی پــه بېلابېلو وختونو کې په مخامخ ګراف کــې څېړي. ایا تاســې تر اوســه پورې د خپلــې ونې(قــد) د اوږدوالــي بدلون ته ســوچ کړی دی چې پــه بېلابېلو وختونو کې څومره وو؟

فعالیت

- د یوې مربع د ضلعې د اوږدوالی او مساحت تر منځ اړیکه په پام کې ونیسئ، د مربع د ضلعې اوږدوالی په x او مساحت یې په y ښیو.
- د x او y اړیکه په یوه معادله کې وښیئ.
- مخامخ جدول پوره کړئ.

x	1	2	3	4	
y		4			25

- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د پورتنیو مرتبو جوړو ټکې وټاکئ او یو بل سره یې ونښلوئ.
- د دقیق ګراف رسمولو لپاره، x ته ډېر سره نږدې قیمتونه ورکوو، لاندې جدول پوره کړې د پورته په څېر ټکې د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ او ګراف یې رسم کړئ.

x	0	0.2	0.5	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3
y		0.4			1				3.24	4					9

- د پورتنی جدول په مرسته لاندې جدول په خپلو کتابچو کې بشپړ کړئ.

x	−3	−2.8	−2.6	−2.4	−2.2	−2	−1.8	−1.6	−1.4	−1.2	−1	−0.8	−0.5	−0.2	
$y=x^2$															0

- د پورتنیو جدولونو څخه په ګټه د $y = x^2$ معادلې ګراف په ډېر دقت رسم کړئ.

د پورتنی فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي.

پایله: په پورتنی فعالیت کې مو ولیدل چې د $y = x^2$ معادلې ګراف مستقیم نه دئ.

مثال: د $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x+1 \end{cases}$ سیستم معادلاتو ګراف د قایمو مختصاتو په سیستم کې رسم کړئ، او ګډ حل یې پیدا کړئ.

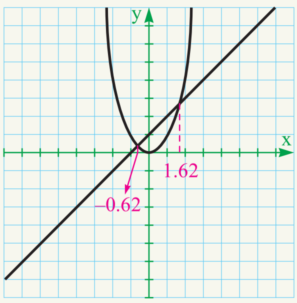
حل: د هغو لارو څخه چې مخکې مو د ګراف د رسمولو لپاره ترې ګټه واخیسته د پورتنیو معادلو د ګرافونو د رسمولو لپاره د هغو د عددونو جدولونه ترتیب او مرتبې جوړې یې د مختصاتو په سیستم کې پس له ټاکلو د معادلو ګرافونه رسموو.

- د $y = x^2$ لپاره لرو:

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2$	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

- د $y = x+1$ لپاره:

x	0	1
$y=x+1$	1	2



د ګراف له مخې د ګډ حل د ټکو ورنژدی قیمتونه یې مساوي په:

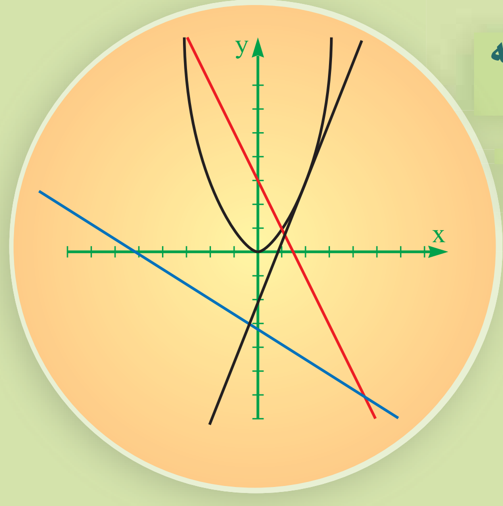
$$x_1 = 1.62 \ , \ x_2 = -0.62$$

پوښتنې

1- د $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x-2 \end{cases}$ سیستم د معادلاتو ګراف رسم کړئ.

2- د $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 0 \end{cases}$ سیستم د معادلاتو ګراف رسم کړئ.

د دويمي درجې معادلې حل په هندسي لاره(طريقه)



په مخامخ شکل کې مستقيم خط له ورکړل شوي منحني سره په څو حالتونو کې قرار لري؟

فعاليت

- ايا د $x^2 - 6x + 7 = 0$ معادله کولای شو چې داسې $x^2 = 6x - 7$ وليکو؟
- که چيرې نومورې مساوات له y سره مساوي وي $y = x^2 = 6x - 7$ نو $y = x^2$ او $y = 6x - 7$ دي.
- د $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 6x - 7 \end{cases}$ معادلو د سيستم ګراف د مختصاتو په سيستم کې رسم کړئ.
- د پورتني سيستم ګرافونه يو بل په څو نقطو کې قطع کوي؟
- د پورتني سيستم حل د ګرافونو د تقاطع له ټکو سره څه اړيکه لري.

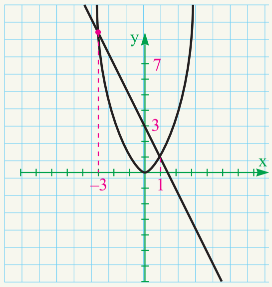
د پورتني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

- هره دويمه درجه معادله کولای شو چې د $y = x^2$ معادلې او د $y = ax + b$ کرښه ايزو معادلو په څير وليکو.
- د x ټکي د پريکړې مختصه(په هغه صورت کې چې وي) د دويمې درجې معادلې حل دی د پورتني کړنې په مرسته د دويمه درجه معادلې حل پيداکول د هندسي حل په نامه يادېږي.

لومړی مثال: د $x^2 + 2x - 3 = 0$ معادلې حل په هندسي لاره پيدا کړئ.

حل: د $x^2 + 2x - 3 = 0$ معادله کولای شو په لاندې ډول وليکو او ګراف يې رسم کړو.

$$x^2 = -2x + 3 \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y = -2x + 3 \end{cases}$$



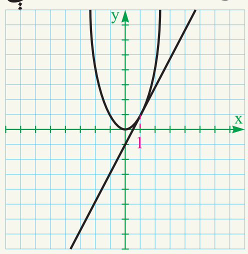
x	–2	–1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

x	0	3
y	3	–3

له شکل څخه ليدل کېږي چې مستقيم خط منحني په دوو بېلو ټکو کې قطع کوي چې د پريکړې ټکي د x مختصه د دويمه درجه معادلې حل دی يعني $x_1 = -3$, $x_2 = 1$

دويم مثال: د $x^2 + 2x + 3 = 0$ معادلې حل د هندسي لارې په مرسته پيدا کړئ.

حل: د $y = x^2$ معادلې او د $y = 2x - 1$ مستقيمې کرښې شکلونه رسموو.



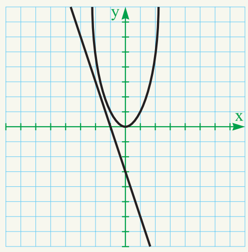
$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	+9	4	1	0	1	4	9

x	0	–1
y	–1	-3

ليدل کېږي، چې کرښه له منحني سره په يوه نقطه کې مماس ده چې ددې نقطې مختصه (قيمت) د معادلې حل دی.

دريم مثال: د $x^2 + 3x + 3 = 0$ معادلې حل په هندسي لاره پيدا کړئ.



$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 3x - 3 \end{cases}$$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	+9	4	1	0	1	4	9

x	0	–1
y	–3	0

ليدل کېږي، چې مستقيم خط منحني نه قطع نو دويمه درجه معادله حل نه لري.

يادونه:

که چيرې منحني په دوو ټکو کې پرې کړي معادله دوه حله لري.

که چيرې منحني په يوه ټکي کې پرې کړي معادله يو حل لري.

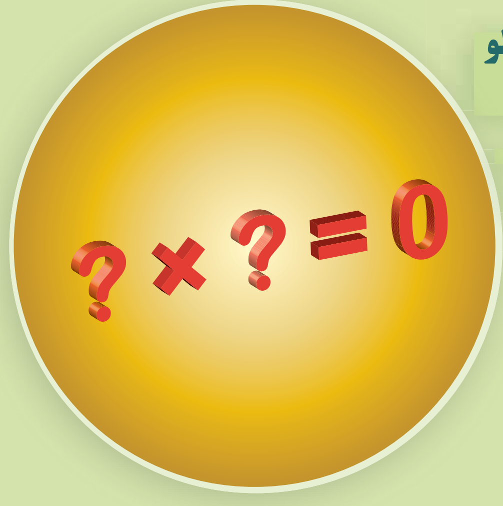
که چيرې منحني قطع يا غوڅ نه کړي، معادله حل نه لري.

پوښتنې

1– د لاندې معادلو حل په هندسي لاره(طريق) پيدا کړئ.

$a)\ x^2 - 2x + 2 = 0$ $\quad b)\ x^2 - 6x + 8 = 0$ $\quad c)\ x^2 - 5 + 7 = 0$

د يو مجهوله دوهمه درجه معادلو حل د تجزيې په لاره(طريقه)



د دوو عددونو د ضرب حاصل څه وخت مساوي په صفر دی.

فعاليت

- كه a او b دوه حقيقي عددونه وي څه وخت $a \times b = 0$ كېږي.
- د $(x-1)(2x+3)$ د ضرب حاصل په پام کې ونيسئ، ايا ويلای شئ چې څه وخت دا حاصل ضرب مساوي په صفر دی؟
- د $2x^2 + x - 3 = 0$ معادله د $(x-1)(2x+3)$ حاصل ضرب سره څه اړيکه لري؟
- د مخکيني لارې(طريقې) څخه په ګټه اخيستنې سره د $2x^2 + x - 3 = 0$ معادلې حلونه پيداكړئ او د $(x-1)(2x+3) = 0$ معادلې له حلونو سره يې پرتله كړئ.

د پورتنی فعاليت پايله په لاندې ډول په لاس راوړو:

پايله: كه وكړای شو، چې دويمه درجه معادله د دوو خطي افادو د ضرب د حاصل په شكل واړوو نو په دې حالت کې د معادلې حل ساده كېږي، چې په لاندې ډول عمل كوو:

- د اعدادو له خاصيتونو څخه پوهېږو چې د دوو عددونو د ضرب حاصل هغه وخت صفر دی چې يو د هغوی د ضربي اجزاوو څخه يو مساوي په صفر وي، دا مسئله د الجبري افادو لپاره هم سمه ده.
- د هرې خطي الجبري افادې حل چې د يوې دوهمې درجې معادلې مساوي ده، د دويمې درجه معادلې حل دی.

لومړی مثال: د $x^2 - 7x + 6 = 0$ معادلې حل د تجزيي په مرسته په لاس راوړئ.

حل: د $x^2 - 7x + 6$ له تجزيي څخه لرو چې:

$$x^2 - 7x + 6 = (x-1)(x-6) = 0$$

د نومورې ضرب حاصل هغه وخت صفر دی چې يو د هغو فکټورونو څخه مساوي په صفر وي او يا دواړه صفر وي؛ يعنې:

$$1)\ x-1=0 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$2)\ x-6=0 \Rightarrow x_2 = 6$$

نو 1 او 6 د $x^2 - 7x + 6 = 0$ معادلې حلونه دي.

دويم مثال: د $2x^2 - 5x - 3 = 0$ معادلې حل د تجزيي په لاره(طريق) پيدا کړئ.

حل: تر اوسه مو هغه معادلې په فکټورونو تجزيه کړې، چې د x^2 ضريب (1) وو خو د هغو معادلو چې د x^2 ضريب يې يو نه وي په لاندې ډول يې بدلوو د دې لپاره چې د x^2 ضريب يوه کامله مربع شي د معادلې دواړه خواوې د x^2 په ضريب کې ضربوو:

$$A = 2x^2 - 5x - 3$$

$$2A = 4x^2 - 10x - 6 = (2x)^2 - 5(2x) - 6$$

$$2A = (2x+1)(2x-6)$$

$$A = \frac{1}{2}(2x+1)(2x-6)$$

$$A = (2x+1)(x-3)$$

او د A د معادلې د حل لپاره لرو:

$$1)\ 2x+1=0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}$$

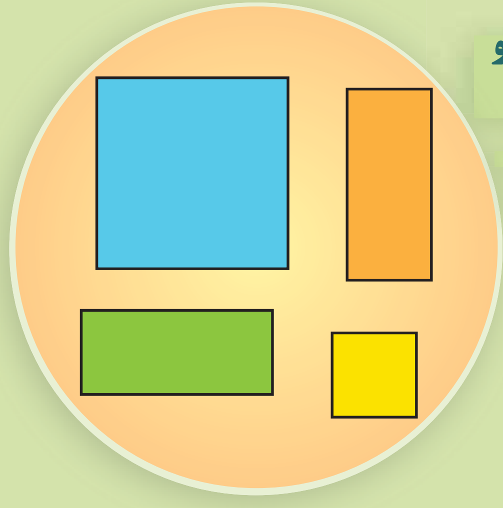
$$2)\ x-3=0 \Rightarrow x_2 = 3$$

پوښتنې

لاندې معادلې د تجزيي په لاره(طريقه) حل کړئ.

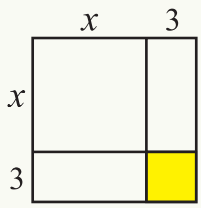
1) $x^2 + 4x + 3 = 0$
2) $x^2 + x - 2 = 0$
3) $x^2 - 6x + 8 = 0$

د دويمې درجې يو مجهوله معادلو حل د تکميل مربع په طريقه



هڅه وکړئ چې د دې شکلونو له يو ځاى کيدو څخه يوه لويه مربع جوړه کړئ.

فعاليت



- د يوې مربع د ضلعې اوږدوالی څومره دی.
- د هرې برخې مساحت د هر مستطيل او مربع په مخ وليکئ.
- د $x^2+6x-40=0$ معادله داسې ترتيب‌کړئ چې متحول لرونکي حدونه يو اړخ او ثابت عددونه د مساوات بل اړخ ته چاڼ شي.
- متحول لرونکي الجبري افاده څه اړيکه له رنګ شوي مساحت سره لري؟
- د مستطيلونو د مساحت عددي ضريب د دويمه درجې معادلې د x له ضريب سره څه اړيکه لري.
- د يوې مربع مساحت څومره دی.
- د دې لپاره چې د متحول لرونکي الجبري افادې د لويې مربع د مساحت سره برابره شي کوم عدد د تساوي دواړو خواوو ته ورزيات کړو.
- د په لاس راغلي اړيکې څخه د قيمت(د دويمې درجه معادلې حل) په لاس راوړو.

محمد بن موسی دا لاره(طريقه) د دويمه درجه معادلې لپاره پيدا کړله. د دې طريقې په پوره کېدو سره د دويمې درجه معادلو په حل کې په بشپړه(عمومي) توګه ګټه اخيستل کېږي، په دې تګلاره(روش) کې د $x^2+bx+c=0$ دويمه درجه معادله په $(x+p)^2=q^2$ بڼه بدلېږي چې د تجزيې پراوونه يې عبارت له:

- لومړی p د x د ضریب د نیمایي سره وضع کوو یعنې $P=\frac{b}{2}$
- وروسته $q^2=-c+(\frac{b}{2})^2$ وضع کوو.
- په پای کې د $x+p=q$ معادله لرو.

لومړی مثال: د $x^2+2x-8=0$ معادله د تکمیل مربع په تګ لاره حل کړئ.

حل: لومړی معادله په لاندې ډول لیکو:

$$x^2+2x=8$$

د x د ضریب نیمایي په لاس راوړو، مربع یې له دواړو خواوو سره جمع کوو:

$$x^2+2x+1=8+1$$
$$(x+1)^2=9$$
$$x+1=3$$
$$x=2$$

یادونه: ټولې دویمه درجه معادلې نشو کولای په دې تګ لاره حل کړو ځکه دا لاره هندسي تعبیر ته اړتیا لري؛ نو ځکه په دې لاره نشو کولای هغه معادلې چې منفي جذرونه لري هم په لاس راوړو.

پوښتنې

لاندې معادلې د تکمیل مربع په طریقه حل کړئ.

a) $x^2+8x-24=0$ b) $x^2-x-\frac{5}{4}=0$ c) $x^2-6x-13=0$

د محمد بن موسی فورمول یا د تکمیل مربع د طریقې توسعه

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

د $ax^2+bx+c=0$ معادلې دواړه خواوې د x^2 په ضریب وویشو نو وواياست چې مخامخ مساوات حقیقت لري؟ که نه؟

ومو لیدل چې دویمه درجه معادله په عمومي ډول داسې $ax^2+bx+c=0$ لیکو چې په هغې کې a, b او c حقیقي اعداد او a د صفر خلاف یو عدد دی، د دې معادلې د حل لپاره داسې عمل کوو:

- د $ax^2+bx+c=0$ معادلې دواړه خواوې په a ویشو:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

- ثابت عددونه د معادلې یو خوا او مجهول حدونه د مساوي بلې خوا ته سره چاپوو د x د ضریب د نیمايي مربع د معالې دواړو خواوو ته جمع کوو:

$$x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2=(\frac{b}{2a})^2-(\frac{c}{a})$$

$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

د لنډې لیکنې لپاره b^2-4ac په Δ سره ښیوو.

فعالیت

هره دویمه درجه معادله چې $ax^2+bx+c=0$ بڼه ولري، لاندې پوښتنو ته ځوابونه ووایئ:

1- که $\Delta=b^2-4ac=0$ وي؛ نو په دې صورت کې د معادلې حلونه کوم دي؟

2- که $\Delta=b^2-4ac>0$ وي؛ نو په دې صورت کې د معادلې حلونه کوم دي؟

3- که $\Delta=b^2-4ac<0$ وي؛ نو ایا معادله د حقیقي عددونو په سټ کې حل لري؟

د پورتنې فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

لومړۍ پایله: د $ax^2+bx+c=0$ دویمې درجه معادلې چې a, b او c حقیقي عددونه او $a\neq 0$ وي.

د $\Delta = b^2 - 4ac$ د قاسمي په نوم يادېږي.

1- كه $\Delta > 0$ وي معادله دوه بېلابېل حلونه لري چې عبارت له:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

2- كه $\Delta = 0$ وي معادله دوه مساوي يا مضاعف حلونه لري چې عبارت له: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

3- كه $\Delta < 0$ وي معادله په حقيقي اعدادو کې حل نه لري.

دويمه پايله: د حلونو د جمع او ضرب حاصل

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

د جذرونو د جمع او د ضرب له حاصل څخه کولای شو د دويمې درجه معادلې په تجزيه کولو کې ګټه واخلو.

لومړی مثال: د $x^2 - 3x + 1 = 0$ معادلې حلونه پيدا کړئ.

حل: لومړی د Δ قيمت پيدا کوو: $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4\times1\times1 = 5$

څرنګه چې $\Delta = 0$ ده نو معادله دوه حلونه لري.

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

دويم مثال: د $9x^2 - 12x + 4 = 0$ حلونه پيدا کړئ.

حل: لرو چې: $\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - (4\times9\times4) = 144 - 144 = 0$

څرنګه چې $\Delta = 0$ ده معادله دوه مساوي حلونه لري.

$$x_1 = x_2 = \frac{b}{2a} = \frac{12}{2\times9} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

دريم مثال: د $5x^2 + 3x + 1 = 0$ معادله حل کړئ.

حل: نوموړې معادله حل نه لري ځکه $\Delta < 0$ څخه ده يعني

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\times5\times1 = 4 - 20 = -16$

څلورم مثال: د $4x - 3x - 1 = 0$ معادلې د جذرونو د جمع او ضرب حاصل پيدا کړئ.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{3}{4} \quad , \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{4}$$

پوښتنې

لاندې معادلې حل کړئ

$c)\ 3x^2 - 12x + 60 = 0$ $\quad b)\ x^2 + 6x + 9 = 0$ $\quad a)\ x^2 + 4x - 21 = 0$

د اووم څپرکي لنډيز

- د دويمې درجه معادلې عمومي بڼه د $ax^2+bx+c=0$ چې $a\neq 0$ ډول ده.
- هغه معادلې چې د $ax^2+c=0$ او $ax^2+bx=0$ په ډول وي، د دويمې درجې نيمګړې معادلې په نامه يادېږي.
- د $ax^2+bx=0$ معادلې حل عبارت له $x_1=0$, $x_2=-\frac{b}{a}$ دي.
- هره دويمه درجه معادله له دوو برخو مستقيم خط او يوه منحني جوړه شوې ده.
- که يو مستقيم خط يو منحني په دوو نقطو کې قطع معادله دوه حله لري.
- که يو مستقيم له منحني سره مماس وي معادله دوه مساوي حلونه لري.
- که مستقيمه کرښه له منحني سره پرېکړه ونه لري معادله په حقيقي عددونو کې حل نه لري.
- د دوو قوسونو د ضرب حاصل هغه وخت مساوي په صفر دی چې لږ تر لږه يو يې مساوي په صفر وي.
- د حلونو، د جمع حاصل له دې اړيکې څخه $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ او د حلونو د ضرب حاصل له دې اړيکې $x_1\times x_2=\frac{c}{a}$ څخه په لاس راځي.
- په بشپړه ډول د هرې دويمې درجې معادلې جذرونه يا حل $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ فورمول څخه په لاس راځي، چې $\Delta=b^2-4ac$ دی.
- که چيرې $\Delta>0$ وي معادله دوه حقيقي حلونه لري.
- که چيرې $\Delta=0$ وي معاديه دوه مساوي حلونه لري.
- که چيرې $\Delta<0$ وي معادله په حقيقي عددونو په set کې حل نه لري.
- د دويمه درجه معادلو د تشکيل لپاره ده $x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2=0$ يا $(x-x_1)(x-x_2)=0$ څخه ګټه اخلو.

د اووم څپرکي پوښتني

• په لاندې سوالونو کې هر سوال ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې وټاکئ.

1- د $4x = 3x^2$ معادلې b, a او c ضريبونه عبارت دي له:

الف) $a = 3\ ,\ b = 4\ ,\ c = 1$ ب) $a = -3\ ,\ b = 4\ ,\ c = 1$

ج) $a = 4\ ,\ b = 3\ ,\ c = -1$ د) هيڅ يو.

2- د $3x^2 - 8x + 5 = 0$ معادله حلونه عبارت له:

الف) $x_2 = \frac{5}{3}\ ,\ x_1 = 1$ ب) $x_1 = -\frac{5}{3}\ ,\ x_2 = 1$

ج) الف او ب د) هيڅ يو.

3- د $y = x^2$ معادلې ګراف عبارت دی له:

الف) مستقيم دی. ب) منحني دی.

ج) الف او ب. د) هيڅ يو.

4- د $x^2 - 10x + 16 = 0$ معادلې د حلونو د جمع حاصل برابر دی له:

الف) $x_1 + x_2 = 5$ ب) $x_1 + x_2 = -5$

ج) $x_1 + x_2 = 8$ د) $x_1 + x_2 = 10$

5- که $\Delta > 0$ څخه وي معادله:

الف) دوه مساوي حلونه لري ب) دوه حقيقي او مختلف حلونه لري

ج) حل نه لري د) يو حل لري

• تش ځايونه ډک کړئ.

1- د يو مجهوله دويمه درجه معادلو عمومي بڼه .... ده.

2- $-\frac{b}{a}$ د حلونو .... او $\frac{c}{a}$ د حلونو .... دی.

3- که .... وي معادله حل نه لري.

4- که د معادلې درجه دوه وي معادله .... لري.

5- د $x^2 - x + 0.25 = 0$ معادلې حلونه .... او .... دی.

• لاندې پوښتنې ولولئ د سم په مخ کې(س) او د ناسم په مخ کې(ن) کلیمه ولیکئ.

1 - (   ) که $b^2-4ac<0$ وي، معادله د حقیقي اعدادو په set کې حل نه لري.

2 - (   ) د محمد بن موسی فورمول $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ دی.

3 - (   ) د $2x^2-4x=0$ معادلې یو حل صفر دی.

4 - (   ) د دویمې درجه معادلې د تشکیل لپاره د $x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2=0$ یاد $(x-x_1)(x-x_2)=0$ شخه گټه اخلو.

5 - (   ) که چیرې په یوه دویمه درجه معادله کې د علامو تحول نه وي نو معادله یو منفي حل لري.

• لاندې پوښتنې حل کړئ.

1- په لاندې معادلو کې b, a او c ضریبونه و ښیئ او ووایاست کومه معادله کامله او کومه معادله ناقصه ده.

$a)\ 3x^2-4x+1=0$ $b)\ 3x^2-1=0$ $c)\ 2x^2-6x=0$

2- د لاندې معادلو حل پیدا کړئ.

$a)\ 3x^2+x-4=0$ $b)\ x^2+4x-32=0$ $c)\ 6x^2-x-2=0$

3- لاندې معادلې د تجزیې په لار(طریقه) حل کړئ.

$a)\ x^2-2\sqrt{3}\,x+3=0$ $b)\ x^2+4x-32=0$

$c)\ x^2-2\sqrt{3}+3=0$ $d)\ cx^2-2acx+ca^2=0$

4- لاندې معادلې په هندسي تگ لاره حل کړئ.

$a)\ 2x^2+7x-1=0$ $b)\ x^2-2x+1=0$

5- د لاندې معادلو حل د تجزیې په طریقه حل کړئ.

$a)\ 4x^2+3x-1=0$ $b)\ x^2+\dfrac{x}{5}=\dfrac{6}{5}$

$c)\ 2x^2+3x+1=0$ $d)\ x^2+3x=0$

6- د عمومي فورمول څخه په ګټه اخیستنې سره لاندې معادلې حل کړئ.

$a)\ 7x^2-8x+1=0$ $b)\ x^2-3x+2=0$

$c)\ t^2-0.27+0.6t=0$

7- که دیوه مستطیل مساحت $20cm^2$ او اوږدوالی د عرض دوه برابره وي د مستطیل اوږدوالی او سور پیدا کړئ.

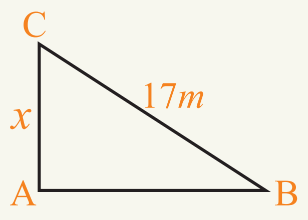
8- که د یوه قایم الزاویه مثلث د قایمو ضلعو اوږدوالی $2a$ او $2a+1$ وي د وتر اوږدوالی یې پیدا کړئ.

9- که دیوه مستطیل مساحت $24cm^2$ او محیط یې $36cm$ وي اوږدوالی او سور یې پیدا کړئ.

10- هغه معادلې ولیکئ چې حلونه یې په لاندې ډول دي.

$a)\ -2,0.5$ $b)\ 3,-1$ $c)\ 0,2$ $d)\ \sqrt{2}-1,2$

11-دوه تنه بایسیکل چلوونکي د A ټکي څخه یو ختیځ لور ته او بل شمال لورته حرکت وکړ په هغه وخت کې چې د دوی تر منځ واټن $17m$ دی هغه بایسیکل چلوونکی چې ختیځ لور ته حرکت کړی دی $7m$ زیات واټن له هغه تن څخه چې شمال لور ته حرکت کړی طی کړی دی. هغه الجبري معادله چې د هغې له مخې وکړای شو چې وهل شوی واټن د هر یوه بایسیکل چلوونکی ولیکئ.



اتم څپرکی

احصائیه

د دیټا (Data) د گیډي کولو لاره

آیا تاسې په خپل ټولگی کې تر ټولو جگه ونه لرئ؟ که چیرې د فلپین او یا اندونیزیا ته ولاړ شئ څنگه؟
تاسې په کومه کچه په یوه هیواد کې جگ او په بل هیواد کې لنډ ونې شمیرل کیږې، معیارونه موکوم دي؟

فعالیت

د یو شمېر کورنیو شمېر چې په څو کلیو کې پرتې دي، په لاندې ډول لیکل شوي اطلاعات په لاس راغلي:

43	40	38	35	53	45	42	40	49	52
56	50	41	46	37	44	39	38	55	51

غواړو دا راکړل شوي دیټا data په دریو گیډیو کې داسې ځای په ځای کړو تر څو پوه شو، چې کوم کلي ډیر، منځنی، او کم وگړي لري.

- ایا کولای شو، چې یو یا څو ورکړل شوي دیټا data له منځه یوسئ؟
- تر ټولو لویې او تر ټولو کوچنی کورنی پیدا کړئ.
- د لړو او ډیرو دیټاگانو data تر منځ وسعت څومره دی؟
- دا وسعت دگیډیو په شمېر وویشئ. سوچ وکړئ دا عدد څه شی راښیي؟
- د عددونو څخه په گټه اخستنې سره جدول ډک کړئ.
- میله یي گراف یې رسم کړئ.

د کورنیو شمېر	د کلیو شمېر
35 - 41	
42 - 48	
49 - 56	

د ډیټا data د دسته بندۍ یا ګیډۍ کولو لپاره لاندې ګامونه په وار سره تر سره کړئ.
- د ډیټاګانو د زیات مقدار او کم مقدار وسعت په لاس راوړئ.
- دا وسعت د دستو په تعداد وویشئ او د اوږدوالي په لاس راوړئ که چیرې حاصل یې طبیعي عدد نه وي کولای شئ هغه(round down)کړئ.
- له دې مقدارونو څخه دستې جوړې کړئ.

مثال: په لاندې جدول کې د 30 روغتونو ناروغان چې په اټکلي ډول نیول شوي داسې راغلي دي:

163	165	161	140	157	160	152	151	152
149	153	146	154	174	172	170	166	164
177	158	146	169	170	172	165	175	172
						168	165	160

دا ډیټاګانې په څلور دستو یا ګیډیو کې ځای په ځای کړئ.
- که چیرې د ناروغانو شمېر په یوه روغتون کې له 175 څخه زیات وي هغه روغتون ته ازدهامي(ګڼه ګوڼه) روغتون وایي. څو روغتونونه ازدهامي(ګڼه ګوڼه) دي.
- د ازدهام د پرتله کولو لپاره میله یي ګراف رسم کړئ.

حل: د دې لپاره چې ډاډه شو ټول ارقام په یوه جدول کې ځای په ځای کوو او تر ټولو زیات او تر ټولو کم ارقام یې په لاس راوړو.

$140=$ترټولو ټیټ رقم

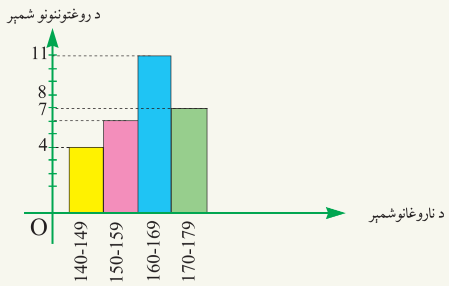
$177=$ تر ټولو لوړ رقم

$177-140=37=$ ټیټ رقم – لوړ رقم

د دستو یا ګیډیو د اوږدوالي د پیدا کولو لپاره دا وسعت د دستو یا ګیډیو په شمېر ویشو $\frac{37}{4}=9.25$ ددې عدد څخه د دستې یا ګیډۍ په اوږدوالي کې ګټه اخلو. اما د کار د اسانۍ لپاره دا عدد روند ډون یا کښته خوا په پام کې نیسو چې په دې ډول د ګیډۍ اوږدوالي د(9) عددپه لاس راځي.

د ناروغانو شمېر	د روغتونو کثرت	دګیډیو وسط یا منځی	f · X
140 – 149	4	144.5	4 × 144.5 = 575
150 – 159	7	154.5	7 × 154.5 = 1081.5
160 – 169	11	164.5	11 × 164.5 = 1809.5
170 – 179	8 n = 30	174.5	8 × 174.5 = 1396

$$\overline{X}=\frac{575+1081.5+1809.5+1396}{30}=\frac{4865}{30}=162.1$$



پاملرنه وکړئ که چیرې د دستې اوږدوالی پورته خوا پوره په پام کې و نه نیسو یعنې روندافه کړو، د دستو(ګیډیو) د اوږدوالی مجموعه له 37 څخه لږ په لاس راځي، چې په دې ډول یو شمېر داتاګانې حساب او له جدول څخه خارجیږي او دا سم کار نه دی.
په ځینو وختونو کې د دستو یا ګیډیو د شمېر(ګروپونو) په ځای د دستو یا ګیډیو اوږدوالی مونږ ته پیژندل شوی دی په دې حالت کې د دستو یا ګیډیو شمېر مونږ ته اهمیت نلري. د دستو یا ګیډیو د اوږدوالی په لرلو سره داسې لیکو چې د هغو اوږدوالی د فرض شویو دستو یا ګیډیو سره برابر وي او وروسته یې جدول پوره کوو.

مثال: په پورتنی مثال کې که د دستو یا ګیډیو په ځای د دستو یا ګیډیو اوږدوالی 8 فرض کړو منځنی یا اوسط قیمت یې پیدا کړئ.

حل: ټیټ رقم یعنې 140 څخه پیل کوو. څرنګه چې د ګیډۍ یا دستې اوږدوالی 8 دی د دوو لاندې پرله پسې سرحدونو تر منځ واټن باید 8 وي. یعنې د دویمې ګیډۍ یا دستې لاندنی سرحد باید 148 وي. اته، اته تر هغه زیاتوو تر څو ډیرې داتاګانې په جدول کې ځای په ځای شي تر پایه دوام ورکوو.

د ناروغانو شمېر	د رغتونو شمېر	دګیډیو اوسط	$f \cdot x$
140 – 147	3	143.5	430.5
148 – 155	6	151.5	909
156 – 163	6	159.5	957
164 – 171	9	167.5	1507.5
172 – 179	6 n = 30	175.5	1053

$$\overline{X}=\frac{430.5+909+957+1507.5+1053}{30}=161.9$$

پوښتنې

1– لاندې ډیټاګانې د 20 زده کوونکو د رسیدلو وخت په دقیقو له کوره تر ښوونځی راښیي:

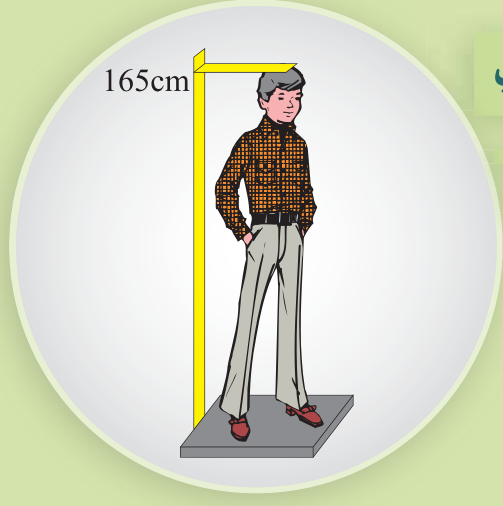
33	65	50	10
23	11	5	48
32	26	26	37
19	13	7	17
22	21	43	29

- پورتنی ډیټاګانې په اوو ګروپو کې ګیلۍ یا دسته بندي کړئ.
- د هرې ګیلۍ کثرت پیدا کړئ.
- میله یي ګراف یې رسم کړئ.
- که چیرې ډیټاګانې په هغه ګروپونو کې چې د ګیلۍ اوږدوالی یې 10 وي کېږدو د کثرت جدول یې جوړ کړئ.

2– یو مثال راوړئ چې ډیټاګانې د دسته بندي لپاره د ګیلیو له اوږدوالی څخه ګټه اخیستل شوی وي.

3– د موضوع د ښه پوهېدو لپاره یو مثال ورکړئ، چې د ډیټاګانو د ګیلۍ کولو ګیلیو له شمېر څخه ګټه اخیستل شوې وي.

د نښتو یا پیوسته دیتاګانو دسته بندي



که چیرې له تاسې څخه پوښتنه وشي چې ونه مو څومره جګه ده څه ځواب ورکوئ.
ایا ټیک داسې عدد دی چې د متر له مخې یې لولئ؟

فعالیت

- که له تاسې څخه پوښتنه وشي چې څو ورونه لرئ، څه وایئ؟ ایا کولی شئ ادعا وکړئ، چې د دغه ډول سوال په ځواب او یا نورو عمومي پوښتنو چې لا ټیک وسایل مو لرلي، کولای مو شول، چې د خپلو هم صنفانو د ورونو د شمیر په ټیک ډول و وایئ.
- ناڅاپي متحول مو څه شي دی او دکومو ډولونو څخه دی.
- که ستاسې یو دوستووایې د ونې اوږدوالی یې ۱۵۶ سانتي متر دی. ایا ټیک د ونې(قد) اوږدوالی یې ۱۵٦ سانتي متره دی؟
- د ۱۵ زده کوونکو د ونو اوږدوالی وروسته له پوښتنې څخه داسې ورکړل شوي.

136	138	151	148	153
139	141	141	131	142
146	132	139	159	152

لاندې جدول بشپړ کړئ.

د زده کوونکو د ونې جګوالی	د زده کوونکو شمیر
130 – 140	
140 – 150	
150 – 160	

- په سوچ ووایئ چې ولې د ۱٤۰ عدد یو وار د دستو یا ګیډیو د پورتنی سرحد په څېر او یو وار د دستو د لاندینی سرحد په څېر راوړل شوي دي.
- که چیرې د یوه سړي د ونې اوږدوالی ۱٤۰ سانتي متره وي څه سوچ کوئ، چې په کومه دسته یا ګیډۍ کې قرار لري.

که چیرې یو نښتي یا پیوسته متحول ولرو د اطلاعاتو په ګیډۍ یا دسته بندي کې د یوې دستې یا ګیډۍ پورتني سرحد به له کوزني سرحد سره برابر وي، د قرارداد له مخې که داتا د پورتنی ګیډۍ یا دستې سره برابر وي په ورپسې سرحد کې لوېږي.

مثال: د 25 ډول، ډول موټرونو چټکتیا په لاندې ډول احصایه نیول شوې ده.

32	35	38	47	44	48	28
30	40	36	51	52	54	31
27	32	42	52	31	29	29
54	49	37	43			

- د کثرت جدول یې ډک کړئ.
- که چیرې د چلولو د جواز سرعت په ښار کې په یوه ساعت کې ۳۰ کیلومتره وي څو موټرونو د چټکتیا د مجاز سرعت څخه زیات چلیدلې دي.
- د ګیډیو د کثرت د جمع حاصل څو دی؟ دا عدد د څه شي سره برابر دی؟

حل: څرنګه چې سرعت یو پیوسته متحول دی؛ نو جدول د پیوسته یا سره نښتي متحول لپاره جوړوو. د ۳۰ عدد په دویمه ګیډۍ کې او د ٤٠ عدد په دریمه ګیډۍ کې لوېږي د ګیډیو د کثرت جمع برابره ده له $n = 4+9+7+5 = 25$ چې د موټرونو د شمېر سره مساوي ده او(۲۱) موټرونو له خپل جواز څخه زیات چلیدلی دی.

سرعت	تعداد
20 – 30	4
30 – 40	9
40 – 50	7
50 – 66	5
	25

پوښتنې

1- لاندې داتاګانې چې د 34 زده کوونکو د هوش ضریب د ښوونځي په اول کال کې راښیي په پام کې ونیسئ.

86	108	108	111	111	103	108	101	88
91	103	105	105	112	96	111	107	96
92	100	112	112	92	89	95	90	105
111	95	108	77	106	90	77		

د 4 دسته یې جدول په جوړولو سره د ګیډیو د کثرت د جمع حاصل، د ګیډیو مرکز، او data منځنۍ قیمت پیدا کړئ.

وزني اوسط یا منځنۍ قیمت
Weighted Mean

که څوک ښه کار سرته ورسوي، انعام یې
نظر کوم عدد ته څو برابره دی.

فعالیت

اوریدلی مو دي چې هغه زده کوونکی چې دولسم ټولګی پای ته ورسوي د کانکور ازموینه په شلورو څانګو کې له خاصو ضریبونو سره سرته رسوي او د هغې د نمبرو په اساس پوهنتونونو پوهنځیو ته ویشل کېږي. اټکل کوو چې د دوو زده کوونکو د کانکور نمبرې په لاندې ډول دی.

مضمون	ژبه او ادبیات د 2 په ضریب	ټولنیز علوم د 2 په ضریب	طبیعي علومو د 3 په ضریب	ریاضي د 4 په ضریب
ضریب	3	2	3	4
لومړی زده کوونکی	61	66	62	61
دویم زده کوونکی	61	66	62	60

ضریب	د دویم زده کوونکی نمبرې	مضمون
4	60	ریاضي
3	62	طبیعي علوم
2	66	ټولنیز علوم
3	61	ژبه او ادبیات

ضریب	د لومړي زده کوونکی نمبرې	مضمون
4	61	ریاضي
3	62	طبیعي علوم
2	66	ټولنیز علوم
3	61	ژبه او ادبیات

- د دواړو زده کونکو د نمبرو منځنی یا وسطي قیمت پیدا کړئ.
- د کوم مضمون نمبرې په منځني یا وسطي قیمت ډېره اغیزه لري؟ ولې؟
- د کوم مضمون نمبرې په منځني یا وسطي قیمت لږ اغیزه لري؟ ولې؟
- که د زده کوونکو د ریاضي مضمون په نمبرو ۵ نمبرې ورزیاتې شي منځنی یا وسطي قیمت ډېر بدلون مومي که دې د ټولنیزو علومو په مضمون ۵ نمبرې زیاتې شي.

که چیرې دیتاګانې په ځانګړې ضریب سره ورکړل شوې وي دا په دې معنا ده چې د دیتا اغیزه یوشان له هغه ضریب سره تړلې ده. په دې حالت کې د ضریبونو دکثرت جدول د دیتاګانې د کثرت په عنوان حسابیږي او په W سره ښودل کیږي. په لاس راغلی اوسط ته وزني اوسط وایي:

$$\bar{x} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \ldots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$ وزني اوسط

مثال: په ځینو پوهنتونو کې نمبرې د تورو په اساس لکه A, B, C, D او F اعلانیږي په دې پوهنتونو کې د A ارزښت څلور، د B ارزښت درې، د C ارزښت دوه، د D ارزښت یو او د F ارزښت صفر وي یوه محصل لاندې نمبرې اخیستې دی.

مضمون	نمرې	د کریډټونو شېر
ریاضیات	B	3
فزیک	A	3
کیمیا	C	2
بیولوژي	B	3
ژبه	A	1

- د دې محصل د نمبرو اوسط څو دی.

حل:

مضمون	حرفی نمره	د کریډټو شمېر =X	عددي نمرې =W	W · X
ریاضیات	B	3	3	$3 \times 3 = 9$
فزیک	A	3	4	$4 \times 3 = 12$
کیمیا	C	2	2	$2 \times 2 = 4$
بیولوژي	B	3	3	$3 \times 3 = 9$
ژبه	A	1	4	$4 \times 1 = 4$

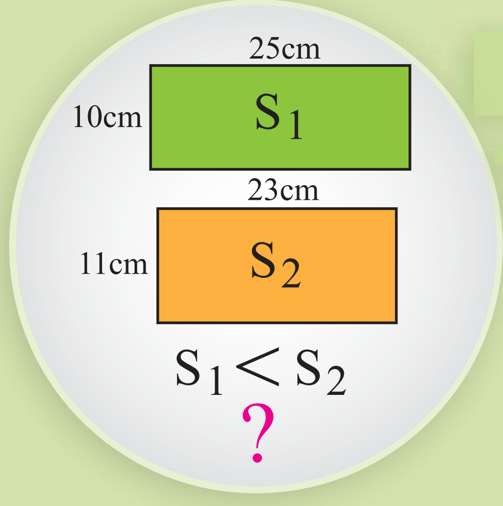
$n = 12$ د کریډټونو شمېر

$$\bar{x} = \frac{9+12+4+9+4}{12} = \frac{38}{12} = 3.16$$ = وزني اوسط یا منځنی

پوښتنې

که د کانکور په یوه ازموینه کې د یوه زده کوونکي نمبرې په وار سره $70, 65, 61$ او 53 او ضریبونه یې په وار سره $3, 2, 1$ وي د دې زده کوونکي د نمبرو اوسط حساب کړئ.

مستطیلي ګراف
Histogram

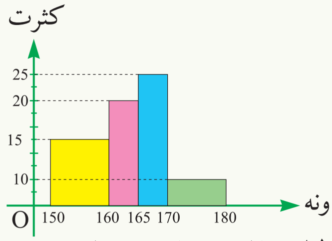


که د یوه مستطیل اوږدوالی 25 سانتي متره او سور یې 10 سانتي متره او دبل مستطیل اوږدوالی 23 سانتي متره او سور یې 11 سانتي متره وي. د دې دواړو مستطیلونو مساحتونه پیدا او یو له بل سره یې پرتله کړئ.

فعالیت

دیوې ښوونځي د 70 زده کوونکو د ونې(قد) اندازه په لاندې ډول په جدول کې ورکړل شوې ده.

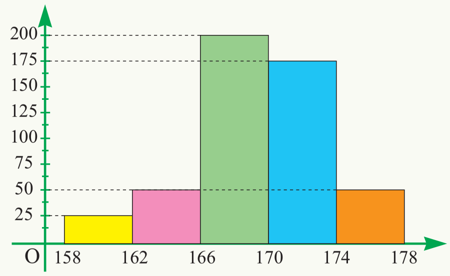
ونه په سانتي	150 – 160	160 – 165	165 – 170	170 – 180
کثرت	15	20	25	10



- په پورتنی ګراف کې د مستطیلونو قاعدې څه شی راښیي.
- د هر مستطیل مساحت په لاس راوړئ. د مستطیل مساحت څه شي راښیي.
- د مستطیلونو جګوالی(ارتفاع) څه شی راښیي.
- پورتنی ګراف له میله یې ګراف سره څه توپیر لري.

یو ځل بیا د یوه ښوونځي د ۵۰۰ زده کوونکو ونې چې اندازه یې په لاندې جدول کې ورکړ شوې ده په پام کې ونیسئ:

ونه په سانتي متر	158 – 162	162 – 166	166 – 170	170 – 174	174 – 178
کثرت	25	50	200	175	50



- جدول ته په پاملرنې سره د مستطیل قاعده څه شی راښيي.
- د مستطیل اوږدوالی څه شی راښيي.
- میله یي ګراف له پورتني ګراف سره څه توپیر لري؟

د ډیټاګانو د پیوسته یا نښتي ښودلو لپاره د مستطیلي ګراف څخه ګټه اخلو په دې ګراف کې د مستطیل عرض د دستو یا ګیډیو د اوږدوالی سره برابر دی په مستطیلي ګراف کې مساحتونه د هرې دستې یا ګیډۍ کثرت راښيي.

که د دستو یا ګیډیو اوږدوالی یو له بل سره برابر وي کولای شو د مساحتونو په ځای راساً کثرت پرتله کړو په دې صورت کې اوږدوالی د کثرت عمودي محور راښيي.

مثال: د یوه ټولګي د زده کوونکو وزن په لاندې جدول کې راکړل شوی دی.

د زده کوونکو وزن په کیلو ګرام	40 – 45	45 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 90
د زده کوونکو شمېر	4	6	12	8	8

دلته لیدل کېږي چې د دستو یا ګیډیو واټن مساوي نه دی، مخکې د مستطیلي ګراف د رسمولو څخه لازمه ده چې د مستطیلونو جګوالی (ارتفاع) یوه ګډ واټن ته په پام کې نیولو سره د ټولو دستو یا ګیډیو پیدا کړو په دې مثال کې $5Kg$ ګډ یا مشترک دی نو کولای شو چې ټول پنځه واره واحده د x په محور په یوه واحد وښیو:

د $40 - 45$ ګیډۍ لپاره یو واحده

د $45 - 50$ ګیډۍ لپاره یو واحده

د $50 - 60$ ګیډۍ لپاره یو واحده

د $60 - 70$ ګیډۍ لپاره یو واحده

د $70 - 90$ ګیډۍ لپاره یو واحده

د مستطیلونو د عمودي اوږدوالي د پیداکولو لپاره د دستو یاګیډیو کثرت د دستو یاګیډیو په اوږدوالي ویشو.

$$40-45 \rightarrow \frac{4}{1} = 4 \rightarrow \frac{4}{5} = 0.8$$

$$45-50 \rightarrow \frac{6}{1} = 6 \rightarrow \frac{6}{5} = 1.2$$

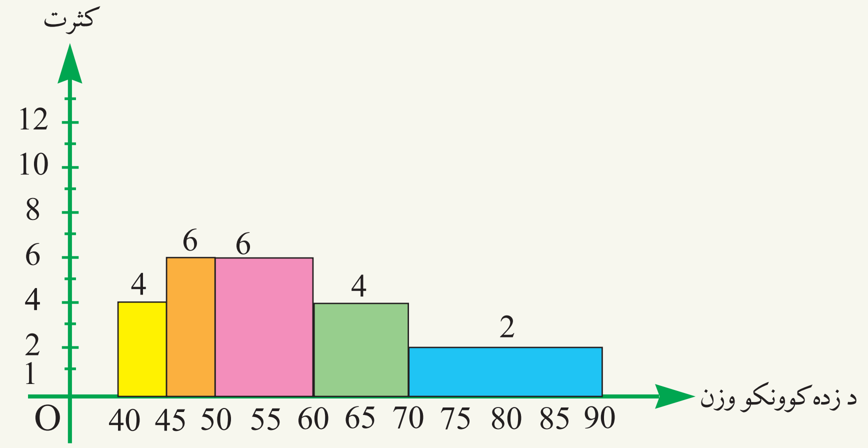
$$50-60 \rightarrow \frac{12}{2} = 6 \rightarrow \frac{12}{10} = 1.2$$

$$60-70 \rightarrow \frac{8}{2} = 4 \rightarrow \frac{8}{10} = 0.8$$

$$70-90 \rightarrow \frac{8}{4} = 2 \rightarrow \frac{8}{20} = 0.4$$

اوس په لاس راغلی پایلې په لاندې جدول کې ترتیب او مستطیلي ګراف د راکړل شوي مثال رسموو:

د زده کوونکو وزن په Kg	40-45	45-50	50-60	60-70	70-90
کثرت نظر واحد فاصلې ته	4	6	6	4	2



پوښتنې

1- لاندې جدول د يوه روغتون د ناروغانو تعداد د هغو ټاکلو ورځو راښيي چې په روغتون کې بستر شوي دي.

د ورځو شمېر	1 – 5	5 – 9	9 – 13	13 – 17	17 – 21	21 – 25
د ناروغانو شمېر	12	10	16	18	14	8

ـ د پورتني جدول مستطيلي ګراف رسم کړئ.

2- د يوه ټولګي 50 زده کوونکو د IQ (ذکاوت) په ازموينه کې ګډون کړی دی، چې پايلې يې په لاندې ډول دي.

122	117	114	112	130	92	118	109	113	115
118	116	106	111	112	124	113	108	107	127
114	100	103	115	124	110	118	118	107	121
110	116	126	121	135	104	123	116	124	104
112	117	113	107	103	102	129	98	134	94

- نوموړو ډاټاګانو ته د کثرت جدول جوړ کړئ. د دې جدول لپاره ۷ ګروپونه داسې په پام کې ونيسئ چې د ګېډيو اوږدوالی يې مساوي وي.
- د دې ډيټاګانو مستطيلي ګراف رسم کړئ.
- څه پايلې اخلئ.

دایره وي ګراف

مخامخ شکل د لرګي یوه کنده ده هغه کرښې چې ددې لرګي په مقطع کې وینئ د څه شي شکل ته ورته دی.

فعالیت

د افغانستان د ښوونې او روزنې وزارت په 1387 کال کې لاندې ارقام د ښوونځیو د زده کوونکو د شمېر په اړه خپرې کړي دي: د ابتدایي زده کوونکو شمېر 250000 د منځنیو ښوونځیو د زده کوونکو شمېر 200000 او د ثانوي زده کوونکو شمېر 150000 دی.

- که د هرې داتا نسبي کثرت په $360°$ درجو کې ضرب کړو هره دوره به څو درجې وي؟
- یوه دایره رسم او مرکزي زاویې یې په لاس ته راغلو اعدادو په اندازه بیلې کړئ. د هرې زاویې دننه د اړوند تحصیلي دورې نوم ولیکئ.
- یو عنوان د ګراف لپاره وټاکئ او د ګراف لاندې یې ولیکئ.
- په دایروي ګراف کې څه، څه سره پرتله کېږي.
- د دایرې په کوچنی کېدو یا لوییدو سره په دایروي ګراف کې څه توپیر راځي؟

له پورتنی فعالیت څخه پوه شو چې کولای شو دیتاګانو د دایرې په مرسته وښیو. د یو ناڅاپي یا اتفاقي متحول د دیتاګانو ښودل د دایرې په مرسته د دایروي ګراف په نامه یادېږي، په دایروي ګراف کې لومړی نسبت د هرې دستې یا ګیلې او ټولې دیتاګانو شمېر په $360°$ ضرب چې د ګیډیو مرکزي زاویه راښیي په لاس راوړو؛ یعنې:

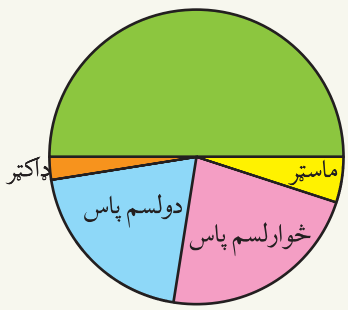
$$\text{له جنسه د درجې کثرت} = \frac{\text{د دیتاګانو کثرت}}{\text{د ټولو دیتاګانو شمېر}} \times 360°$$

مثال: یوه مؤسسه چې د کارکوونکو شمېر یې ۲۰۰ او د تحصیل د درجې له مخې ویشل شوی دی.

د تحصیل درجه	ډاکټر	ماسټر	لیسانس	خوارلسم پاس	دولسم پاس
د کارمندانو شمېر	5	10	100	45	40

د دې دیتا دایروي ګراف په لاندې ډول دی.

د تحصیل درجه	کثرت	مرکزي زاویه د درجې له جنسه
ډاکټر	5	$\frac{5}{200} \times 360^\circ = 9^\circ$
ماسټر	10	$\frac{10}{200} \times 360^\circ = 18^\circ$
لیسانس	100	$\frac{100}{200} \times 360^\circ = 180^\circ$
خوارلسم پاس	45	$\frac{45}{200} \times 360^\circ = 81^\circ$
دولسم پاس	40	$\frac{40}{200} \times 360^\circ = 72^\circ$



پوښتنې

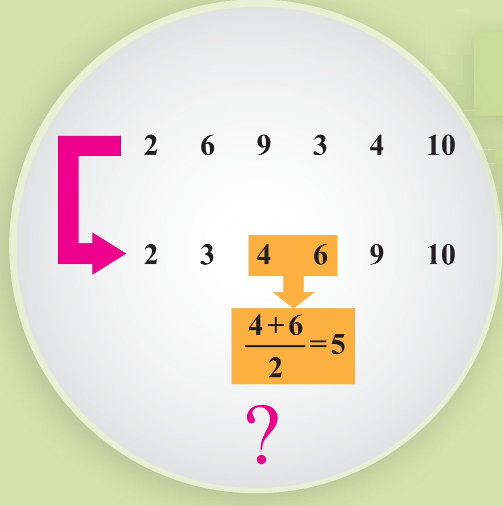
– د لاندې جدول په پام کې نیولو سره د کورنیو دایروي ګراف د جمعیت له مخې رسم کړئ.

د کورنی نوع	ډېر جمعیت	منځنی جمعیت	لږ جمعیت	جمع
د کورنی شمېر	11	23	6	40

– دایروي ګراف د څه ډول متحول لپاره مناسب دی.

- که د دیتاګانو کثرت دوه برابره کړو، ایا مرکزي زاویه یې بدلون مومي؟

میانه
Median



که له تاسې څخه پوښتنه وشي، چې د نومرو اوسط مو څو دی؟ له اوسط څخه ګټه اخلئ. که له تاسې څخه وپوښتل شي، چې ترټولو ډير ځله ستاسو د نومرو په اطلاعنامه کې څو دي؟

که له تاسې پوښتنه وشي، چې تاسې د ښو زده کوونکو په منځ کې یاست که د کمزورو زده کوونکو په منځ کې تاسې دې سوال ته ځواب ورکوئ.

فعالیت

- سوچ وکړئ د((میاني)) لغت یعني څه؟
- که یو شمېر ډیټاګانو ولرو څرنګه کولای شو د هغو وسطي مقدار پیدا کړو.
- که د ډیټاګانو شمېر طاق وي، ایا وسطي مقدار د ډیټاګانو په میانه کې شته دی؟
- که د ډیټاګانو شمېر جفت وي، ایا وسطي مقدار د ډیټاګانو په میانه کې شته دی؟
- ایا کولای شو وسطي مقدار پرته له ترتیب کولو د ډاټاګانو په لاس راوړو.
- که د ډیټاګانو مقدار جفت وي اټکل کولی شئ، چې څه مقدار د وسطي مقدار په عنوان وټاکو.
- لاندې ډیټاګانې په پام کې ونیسئ.

2 3 5 1 4

– وسطي مقدار يې پیدا کړئ.
– د ډیټا د وسطي مقدار يې شمېر مخکنۍ ډاټا له شمېر سره څه اړیکه لري.
– لاندې ډیټا په پام کې ونیسئ.

2 3 5 1 4 5

– یو وسطي عدد پیدا کړئ، چې د ډیټا شمېر يې وروسته او د مخکنۍ له هغه عدد د ډیټا له شمېر سره برابر وي.

که د ګیډیو اوږدوالی یو له بل سره برابر وي کولای شو د مساحتونو په ځای راساً کثرت پرتله کړو په دې وضعیت کې اوږدوالی د کثرت عمودي محور راښیي نو په دې حالت کې مساحت نشو په لاس راوړئ.

مثال: د یوه ټولګي د زده کوونکو وزن په لاندې جدول کې راکړل شوی دی.

10000 7000 4000 6000 3000

ددې data میانه حساب کړئ.

حل: لومړی data مرتب کوو:

3000 4000 6000 7000 10000

لیدل کېږي چې د 6000 عدد د عددونو په وسط(منځ) کې قرار لري نو د data میانه د پورته عددونو ده.

دویم مثال: د لاندېdata میانه وټاکئ.

2 6 9 3 4 10

حل: د میانې د حسابولو لپاره عددونه ترتیب کوو.

2 3 4 6 9 10

دا عددونه د پورته عددونو د data میانه ده.

لیدل کېږي چې د data منځ کې داسې عدد نشته چې د میانې خاصیت صدق کړي نو که چیرې تاسې $5 = \frac{4+6}{2}$ په پام کې ونیسئ چې د میانې ځانګړتیا په کې صدق کوي او دا عدد د پورتنی داتا میانه ده چې د پنځو شخه وروسته د داتا شمېر د پنځو شخه د پورته داتا سره برابر دی.

پوښتنې

1- لاندې جدول د یوه روغتون د ناروغانو شمېر د هغو ټاکلو ورځو راښیي چې په روغتون کې بستر شوی دی.

1 ,2 ,3 او 0 ,2 ,100

2- د پورتني جدول مستطیلي ګراف رسم کړئ.

5 ,15 ,4 ,0 ,12 ,15 ,5 ,6 ,5 ,0

3- که له ټولو دیتاګانو سره یو ثابت عدد جمع شي د میانې په مقدار کې څه اغیزه منځ ته راځي په یوه مثال کې یې وښیئ.

4- که دیتاګانې دوه برابره کړو د میانې په مقدار کې څه اغیزه کوي په یوه مثال کې یې وښیئ.

د تحول ساحه
Range

د خپلو هم ټولګیوالو ونې مو اندازه کړې.
د تر ټولو لوړو ونو او د تر ټولو لنډ ونو تر منځ توپیر حساب کړئ، که و موغوښتل چې د زده کوونکو تر ټولو زیات توپیر پیدا کړئ ایا لازمه ده چې د نورو زده کوونکو ونې اندازه کړئ؟

فعالیت

د اووم ټولګي د 10 زده کوونکو او لسم ټولګي 10 زده کوونکو د ونو لوړوالی په اتفاقي ډول ټاکل شوی، چې لاندې راوړل شوي دي.

د اووم ټولګي زده کوونکي : 142 ,145 ,146 ,148 ,148 ,148 ,149 ,149 ,150 , 152

د لسم ټولګي زده کوونکي : 150 ,151 ,153 ,156 ,158 ,158 ,159 ,160 ,160 , 160

- د دواړو ګروپونو د لوړو ونو تر منځ وسعت پیدا کړئ.
- أیا د دواړو ګروپونو د اعدادو تر منځ وسعت یو شان دی.
- که چیرې دیتاګانې و نه لرو، ایا د دیتا د لږو او ډیرو توپیرونو په لرلو سره د دې ګروپونو په اړه مونږ کولای شو چې سره پرتله یې کړو.
- ایا د بدلون یا تحول د ساحې برابروالي په دواړو ګروپونو کې د دیتا د یووالي په مانا دی.
- د نمونې د تعریف په پاملرنې سره که داګروپونه د ټولنې په عنوان په پام کې ونیسو په نمونه کې د واټن د اوږدوالي زیاتوالي، په ټولنه کې د واټن د اوږدوالي د زیاتوالي پایله راکوي.

د پورتني فعالیت څخه پوهېږو د واټن اوږدوالی چې متحول په هغې کې د بدلون امکان لري د تحول د ساحې په نامه یادېږي. دا معیار د جګې او ټیټې دیتاګانو ترمنځ وسعت را په ګوته کوي.پاملرنه باید وشي چې د تحول د ساحې لوی والی په یوه ټولنه کې د توپیر یا پراګندګي ډیر والی دی هر څومره چې دا توپیر کم وي د وګړو پراګندګي کمه ده. د یوې ټولنې وګړي د دې ځانګړتیا له مخې یو بل ته نږدې دي که د تحول ساحه صفر وي، که د وګړو د ځیرنو د ځانګړتیاوې سره برابرې او یو شان وي په دې حالت کې ټولنه یوه متجانسه ټولنه بولو.

مثال: د دوو زده کوونکو د $4\frac{1}{2}$ میاشتنی ازموينې نمبرې په لاندې ډول دی.

الف: 20 , 21 , 25 , 32 , 33 , 35 , 36 , 37 , 38 , 39

ب: 20 , 33 , 34 , 35 , 35 , 35 , 34 , 34 , 35 , 39

- د دواړو دستو یا گیډیو د تحول ساحه پیدا کړئ.
- أیا د دیتاگانې پراگندگي په لومړی یا که په دویم گروپ کې کمه ده.

حل: د دواړو گروپونو د تحول ساحه یو برابر ده.

$$39 - 20 = 19$$

د دویم گروپ د دیتاگانې پراگندگي لږ او په دیتاگانې کې د 34 او 35 عددونه زیات تکرار شوی دی واټن یې کم دی. ولې پراگندگي په لومړی گروپ کې ډېره ده د تحول ساحه یوازې له لږو او زیاتو مقدارونو سره کار کوي. د دیتاگانو په اړه او د هغوی تر منځ هیڅ اطلاعات مونږ ته نه راکوي. نو د تحول د ساحې په لږلو سره نشو کولای د دیتاگانې د میانې د پراگندگي د میزان اټکل وکړو.

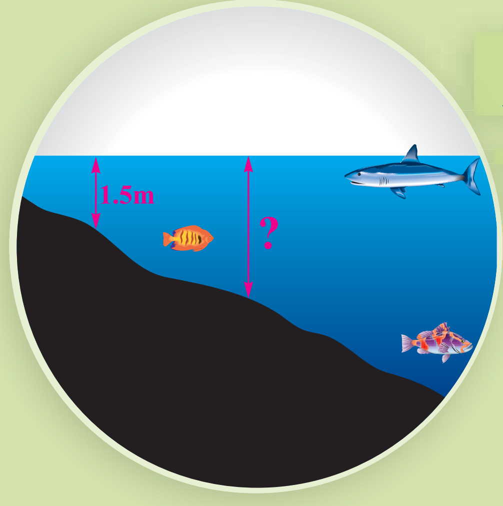
پوښتنې

1- لاندې داتاگانې په پام کې ونیسئ.

1 ,2 ,5 ,6 ,6 ,7 ,8 ,9 ,10 ,11 ,15

- ددې داتاگانې د تحول ساحه پیدا کړئ.
- که د پورتنی data تر ټولو زیات او کم data له منځه یوسو د تحول ساحه یې پیدا کړئ.
- دا دواړه د تحول ساحه یو له بل سره پرتله کړئ او ووایاست چې د کوم یو پراگندگي زیاته ده.

د انحراف اوسط
Average deviation



که د یوه سیند د یوه ټکي ژوروالی 1.5 متره وي سوچ وکړئ چې د سیند د ټولو ټکو ژوروالی یو شان دی؟

فعالیت

پنځو تنو زده کوونکو په یوه صنفي ازموینه کې لاندې نمبرې اخیستي دي.

12 14 16 18 20

- د دې نمبرو اوسط او یا منځنی قیمت پیدا کړئ.
- د ټولو دیټاګانو د منځ یا اوسط توپیر پیدا کړئ.
- د هرې دیټاګانو د منځنیو د توپیر د جمع حاصل ولیکئ.
- د هرې دیټاګانو د اوسط یا منځ د توپیر د مطلقه قیمتونو د جمع حاصل پیدا کړئ.
- په لاس راغلي قیمتونه سره پرتله کړئ.
- د پنځو دیټاګانو تاسې پخپله یو مثال ورکړئ او پورتنی عملیې پرې سر ته ورسوئ.

له پورتني فعالیت څخه پوهېږو هغه توپیر چې د دیټاګانو او اوسط تر منځ دی د منځ یا اوسط انحراف په نامه یادېږي.

د data د منځنی یا اوسط انحراف مجموع همیشه صفر ده. په دې دلیل د data د څېړنې لپاره د انحراف د مطلقه قیمت څخه ګټه اخلو. که د ټولو انحرافونو د مطلقه قیمت جمع کړو او د data په شمېر یې ووېشو د انحراف اوسط یا منځنی ورته ویل کېږي، د لاندې فورمول په مرسته حسابېږي.

$$\text{د انحراف اوسط یا منځنی} = \frac{|x_1-\bar{x}|+|x_2-\bar{x}|+\ldots+|x_n-\bar{x}|}{n}$$

دلته $X_1, X_2 \dots X_n$ عبارت له data او $\overline{X}$ د دیټاګانو منځنی یا اوسط او n د دیټاګانو شمېر دی، لیدل کېږي چې هر څومره د منځنی انحراف لوی وي، نو په هم هغه اندازه د data د پراګندګي له اوسط نه ډېره ده.

مثال: د 40 تنو زده کوونکو نمبرې په لاندې جدول کې ورکړل شوي دي.

نمرې	کثرت
0 – 10	2
10 – 20	7
20 – 30	4
30 – 40	5
40 – 50	10
50 – 60	12

د پورتنیو نمبرو د انحراف منځنی پیدا کړئ.

حل: لومړی د اوسط یا منځنی مقدار په لاس راوړو.

f= کثرت	د داتاګانو اوسط	f · x	$x-\overline{x}$	$f(x-\overline{x})$
2	5	10	5 – 37.5 = –32.5	2 × (–32.5) = –65
7	15	105	15 – 37.5 = –22.5	7 × (–22.5) = –157.5
4	25	100	25 – 37.5 = –12.5	4 × (–12.5) = –50
5	35	175	35 – 37.5 = –2.5	5 × (–2.5) = –12.5
10	45	450	45 – 37.5 = 7.5	10 × 7.5 = 75
12	55	660	55 – 37.5= 17.5	12 × 17.5 = 210
n = 40		1500		

$$\overline{x} = \frac{10+105+100+175+450+660}{40} = \frac{1500}{40} = 37.5$$

لیدل کېږي چې د $f(x-\overline{x})$ د جمعې حاصل له صفر سره مساوي دی. نو باید مطلقه قیمت یې سره جمع کړو.

$$\text{د انحراف اوسط} = \frac{|-65|+|-157.5|+|-50|+|-12.5|+|75|+|210|}{40}$$

$$\text{د انحراف اوسط} = \frac{65+157.5+50+12.5++75+210}{40} = \frac{570}{4} = 14.25$$

پوښتنې

د A او B دوو جمعیتونو انحرافونه لاندې راکړل شوي.

د A جمعیت انحرافونه: 4 2 0 0 -1 -2 -3

د B جمعیت انحرافونه: 8 1 0 0 -2 -3 -4

- د A جمعیت د انحراف منځنی پیدا کړئ.
- د کوم جمعیت پراګندګي زیاته ده.

د اتم څپرکي لنډيز

- ګېډۍ د هغو ډيټاګانو مجموعه ده، چې د ګېډۍ ځانګړتياوې ولري. د ډيټاګانو د ګېډۍ کيدو يا لپاره لاندې پراوونه په پام کې نيسو:
  - د تحول ساحه: د ډيټاګانو د ډېر لږو او ډېر زياتو تر منځ وسعت.
  - د ګېډۍ اوږدوالی: د تحول د ساحې او د دستو د شمېر نسبت.
  - د دستو کثرت: د هغو ډيټاګانو د ګېډيو شمېر چې په هره دسته کې قرار لري.
  - د ګېډۍ مرکز: د هرې دستې د منځنی محاسبه.
- په دسته بندۍ کې که متحولونه پيوسته يا پرله پسې وي د ورپسې ګېډۍ پورتنی سرحد د مخکينی ګېډۍ يا دستې لاندې سرحد سره برابر دی. په هغه صورت کې چې ډيټاګانو د دستې د پورتنی سرحد سره برابر وي هغه ډيټاګانو په ورپسې ډيټاګانو پورې اړه لري.
  د ډيټاګانو د دستو د شمېر مجموع د ټولې ډيټاګانو د شمېر سره برابره دی.
- فرض کوو د $X_1, X_2 \ldots X_n$ data په ترتيب د $W_1, W_2 \ldots W_n$ ضريبونه وي دغه اطلاعات کولی شو په لاندې جدول کې خلاصه کړو.

data	X_1	X_2	⋯	X_n
د وزن ضريب	W_1	W_2	⋯	W_n

- په دې حالت کې د پورتنی داتاګانو منځی په لاندې ډول محاسبه کړو.

$$\text{وزني اوسط} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots\ldots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \ldots\ldots + w_n}$$

- هستوګرام يا مستطيلي ګراف عبارت له هغه ګراف څخه دی، چې د کثرت توزيع يې د مستطيلونو په مرسته ښودل کېږي.
  د مستطيل جګوالی د دستې يا ګېډۍ د کثرت سره برابره ده.
  د هر مستطيل مساحت د دستې يا ګېډيو د اوږدوالی او د دستې يا ګېډۍ د کثرت له حاصل ضرب سره برابر دی.
  په مستطيلي ګراف کې مستطيلونه يو بل سره ترلی او د ترليو(پيوسته) متحولينو څخه د ګراف د ښودلو لپاره ګټه اخلي.

- په یوه اختیاري شعاع یوه دایره د مرکز زاویې په مرسته په n برخو ویشو داسې، چې دهرې برخې د مرکزي زاویې اندازه د کثرت سره د هغې قیمت متناسبه وي په دې حالت کې یې مرکزي زاویه نظر لومړی دستې یا ګیډۍ ته عبارت دی له:

$$\text{کثرت د درجې له مخې} = \frac{\text{د دیتاګانو کثرت}}{\text{د ټولو دیتاګانو شمېر}} \times 360^\circ$$

- د میانې د پیدا کولو لپاره په لومړی مرحله کې دیتاګانې منظم کوو او روسته:

- که د دیتاګانې شمېر طاق وي د دیتاګانې منځی یا اوسط ده.

- که د دیتاګانې شمېر جفت وي میانه د دوو دیتاګانې منځنی اوسط دی.

- د تر ټولو کوچنی دیتاګانې او تر ټولو لوی دیتاګانې توپیر د تحول د ساحې څخه عبارت دی یا په بل عبارت داتاګانې په هغه ساختهٔ کې بدلون کوي.

- د هرې دیتاګانې د منځنی تفاضل ته د منځنی انحراف وایي.

د انحراف منځی یا اوسط د انحرافونو د مطلقه قیمت د اوسط څخه عبارت دی او فورمول یې د اړوند دیتاګانې لپاره په لاندې ډول لیکو:

$$\text{د انحراف اوسط} = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \cdots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

د اتم څپرکي پوښتنې

1- لاندې جدول ډک کړئ.

تجمعي کثرت	د دستې مرکز	کثرت	ګيلۍ(دسته)
		12	7,5-10,5
		10	10,5-13,5
		15	13,5-16,5

● پورتنی جدول د کومې دسته بندۍ ګراف راښيي. پيوسته يا نښتی يا مجزا.

2- لاندې جدول د 200 شل کلنو ځوانانو د ونو اوږدوالی راښيي.

د دستې مرکز	کثرت	ګيلۍ(دسته)
153	15	149,5-156,5
160	20	156,5-163,5
167	30	163,5-170,5
174	25	170,5-177,5
181	10	177,5-184,5

● مستطيلي ګراف يې رسم کړئ.

3- د A, B, C, D او E ښارونو کې 200 مليونه افغانۍ سرمايه په کار اچول شوی ده داسې چې:

● د A ښار لپاره 110 مليونه افغانۍ
● د B ښار لپاره 32 مليونه افغانۍ
● د C ښار لپاره 24 مليونه افغانۍ
● د D ښار لپاره 14 مليونه افغانۍ
● د E ښار لپاره شل ميليونه افغانۍ معلومات ورکړل شوي او دايروي ګراف يې رسم کړئ.

ښارونه	د سرمايې ويش په مليون	سرمايه په فيصدي	سرمايه په درجه
A	110		
B	32		
C	24		
D	14		
E	20		

4- يو شمېر کورنی د خپلو غړو د شمېر سره په لاندې جدول کې ورکړ شوی دی.

کورنۍ	18	12	15	8
د کورنۍ غړي	2	4	5	8

- د کورنی مود پیدا کړئ.
- میانه یا منځنی پیدا کړئ.
- اوسط میانه پیدا کړئ.
- د تحول ساحه محاسبه کړئ.

5- د یوه ټولګی د زده کوونکو د ونو اندازه په لاندې جدول کې ورکړ شوی.

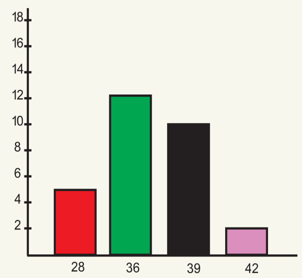
د ونې اندازه	1.5-1.6	1.6-1.7	1.7-1.8	1.8-1.9	1.9-2
کثرت	5	16	9	4	1

- دګیډي مود مشخص کړئ.
- دګیډ یو مرکز حساب کړئ.
- منځی یې پیدا کړئ.

6- یوه ښوونکی د یوه صنفي ازموینې د اوسط محاسبه داسې وکړه:

$$\text{د ازموینې اوسط} = \frac{1\cdot 4+3\cdot 6+2\cdot 8+7\cdot 9+3\cdot 10+3\cdot 11+5\cdot 12+1\cdot 15}{25}$$

- د ټولګي د زده کوونکو شمېر پیدا کړئ.
- څو نمبرې د ۸ او ۱۳ تر منځ قرار لري د (۸ او ۱۳ په ګډون)؟
- عمومي منځی یې څو دی.



7- لاندې میله یې ګراف د هغو کتابونو شمېر راښیي چې په یوه میاشت کې مطالعه شوی دی.
- احصائیوي جدول رسم شي.
- د مطالعه شویو کتابونو شمېر په میاشت کې څو دی.

8- که د تحول ساحه له صفر سره برابره وي د داتاګاني څخه څه پایله اخلئ.
9- که په داتاګانې باندې یو ثابت مقدار علاوه کړو د تحول ساحه څرنګه تحول کوي؟

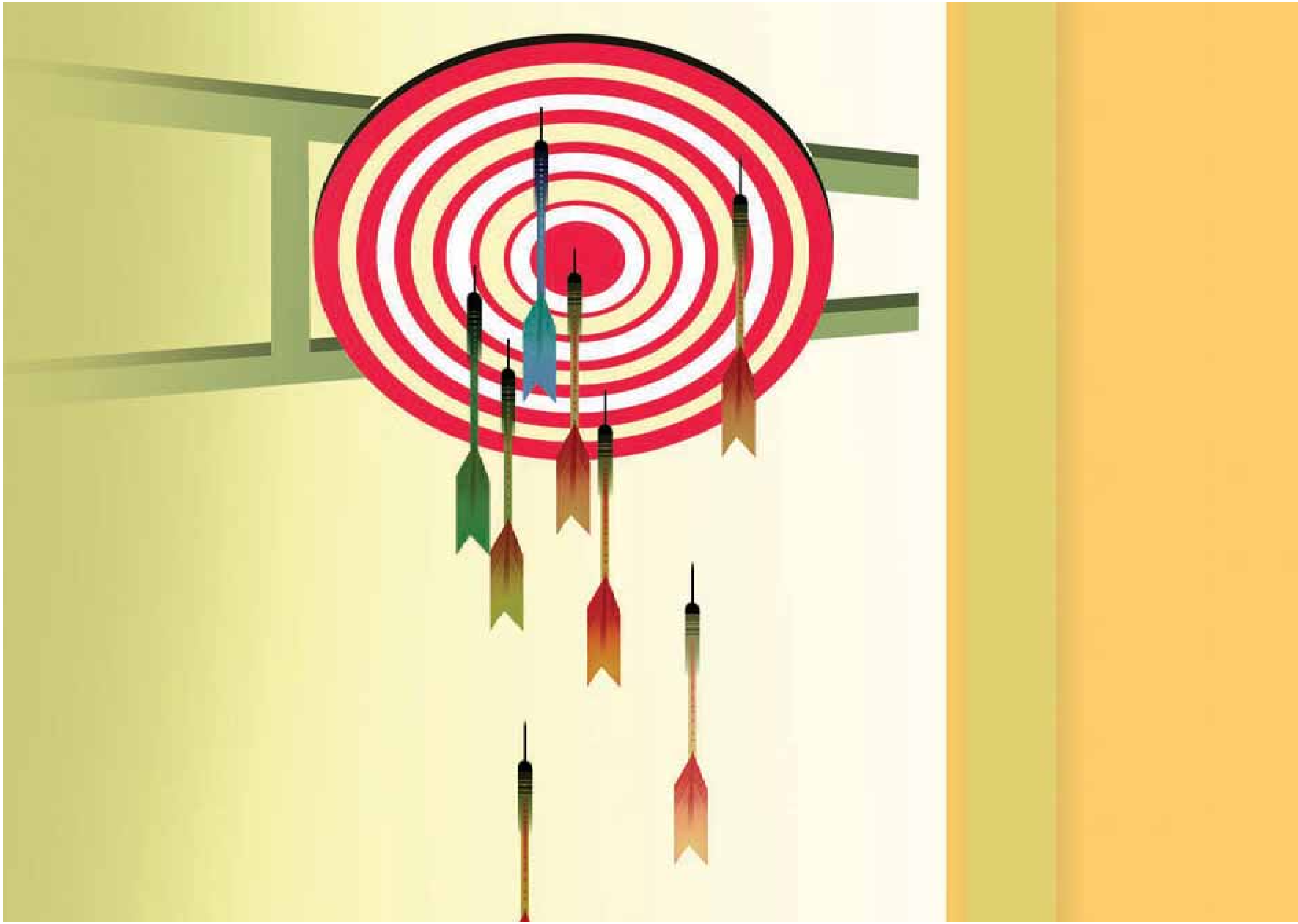
10- د څلورو زده کوونکو د هغو ساعتونو شمېر چې لوبو ته یې ورکړی دی په لاندې ډول راغلی دی:

1 5 7 9

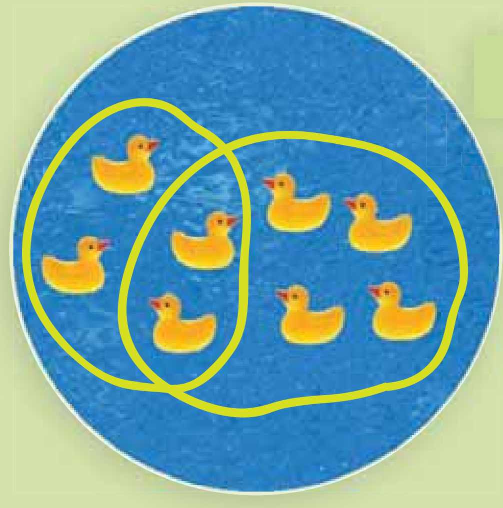
- د پورتنی داتاګانو د انحراف منځی یا اوسط حساب کړئ.

نهم څپرکی

احتمالات



د ناڅاپو پېښو اتحاد



په دواړو شکلونو کې یو ځای خو هیلۍ وینئ.
هیلۍ په کومه حلقه پورې اړه لري؟

فعالیت

- د یوې دانې رمل د اچولو په تجربه کې د $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ نمونې فضا او د $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,5,6\}$ او $C=\{1,2\}$ ناڅاپي پېښې په پام کې نیسو.
- د A او C ناڅاپي پېښې یو له بل سره څه اړیکې لري؟
- که د A یا د B پېښې رامنځ ته شوي وي ایا ویلی شئ چې د $A\cup B$ پېښه شوې ده؟
- د A پېښه رامنځ ته شوې او بله کومه اختیاري پېښه چې هیڅ پېښه شوې نه ده نا ممکنه یا ϕ پېښه نومول کېږي.
- ویلی شئ چې د $A\cup\phi$ او د A پېښې یو د بل سره څه توپیر لري؟

د پورتني فعالیت پایلې په عمومي ډول د S په نمونه یې فضا کې د B, A او C ناڅاپه پېښو لپاره په لاندې ډول په لاس راوړو.

پایله:

- که چیرې د S په یوه نمونه یې فضا کې د $A\subseteq B$ ناڅاپي پېښه وي، په دې صورت کې:
$$A\cup B=B$$
- که چیرې د S په یوه نمونه فضا کې د A او B ناڅاپي پېښه وي، د $A\cup B$ او $B\cup A$ پېښې یو بل سره توپیر نه لري؛ یعنې:
$$A\cup B=B\cup A$$
- که چیرې د S په یوه نمونه یې فضا کې د A یا B یوه پېښه رامنځ ته شي نو د $A\cup B$

پیښنه هم رامنځ ته شوې ده، چې سربېره په دې

$$A \subseteq A \cup B \quad \text{او} \quad B \subseteq A \cup B$$

• د A پیښه د S په نمونه یي فضا کې پیښه شوې ده او یوه بله پیښه چې هیڅ نه پیښیږي، یعني ϕ، په دې معنا ده چې یوازې د A پیښه را منځ ته شوې ده.

$$A \cup \emptyset = A$$

• د $A \cup B$ ناخاپي پیښه په دې معنا ده، چې لږ تر لږه د A یا B پیښه منځ ته راغلې ده.

مثال: که چیرې د C ناخاپي پیښه د A او B دوې بېلا بېلې ناخاپي پیښې په خپل ځان کې ولرې په دې صورت کې د $A \cup B$ ناخاپي پیښه هم په خپل ځان کې لري په یوه مثال کې یې واضح کړئ.

حل: د $A = \{1,2\}$ ، $B = \{2,3\}$ او $C = \{1,2,34\}$ پیښې په پام کې نیسو لیدل کېږي، چې $A \subseteq C$ او $B \subseteq C$ دی نو:

$$B \cup A = A \cup B = \{1 , 2 , 3\} \Rightarrow A \cup B \subseteq C$$

پوښتنې

1- د S د یوې نمونه یي فضا څخه د B, A او C د ناخاپو پېښو لپاره د یو مثال (بیلګې) په مرسته د لاندې اړیکو سم والی وڅیړئ.

a) $A \cup \emptyset = A$

b) $A \cup A = A$

c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

2- که $A \subseteq B$ وي په یوه مثال کې وښیئ چې $A \cup B = B$ دی.

3 - که چیرې د A او $A \cup B$ ناخاپي پیښې سره برابرې وي، په یوه ګراف کې وښیئ چې د A ناخاپي پېښه د B ناخاپي پیښه په بر کې لري.

د ناخاپي پیښو تقاطع

د نـور اصلي رنګونـو د پریکړې څخه کوم رنګونه لاسته راځي؟

فعالیت

- د رمل د یوې داني د اچولو نمونه یي فضا $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ او د $A=\{2,4,6\}$، $B=\{4,6\}$ او $C=\{1,3,5\}$ ناخاپي پیښې په پام کې نیسو.
- د $A\cap B$ او $B\cap A$ ناخاپي پیښې یو بل سره څه اړیکه لري.
- ایا د A او B پیښې د $A\cap B$ ناخاپي پیښه په بر کې لرلی شئ که نه؟
- وښيي چې د $C\cap B$ ناخاپي پیښه یوه ناشونې پیښه ده.
- که د B پیښه د A پیښه په ځان کې ولري، د A او $A\cap B$ ناخاپي پیښې سره پرتله کړئ.

د پورتني فعالیت څخه کولای شو لاندې پایلې په عمومي ډول بیان کړو.

پایله:

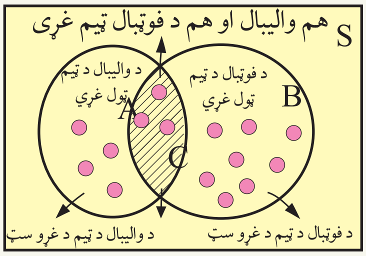
د S په یوه نمونه یي فضا کې د A,B او C ناخاپي(تصادفي) پیښو لپاره لرو.

- د $A\cap B$ او $B\cap A$ ناخاپي پیښې یو شان دي.
- د A او B ناخاپه پیښې هره یوه یې د $A\cap B$ ناخاپه پیښه په خپل ځان کې لري.
- که د A او B دوه پیښو چې تشی نه $A\cap B=\phi$ وي په دې حالت کې د A او B پیښې یوه له بله بیلې پیښې بلل کېږي.
- د A پیښې لپاره لرو:

$$A\cap S=A \ ، \ A\cap\emptyset=\emptyset$$

- که چیرې د B پیښه د A پیښه په خپل ځان کې ولري، نو $A\cap B=A$ سره ده.

مثال: د ښوونځی د فوټبال له ټیم څخه درې تنه د ښوونځی د والیبال د ټیم غړي هم دي که چیرې د فوټبال د ټیم غړی په A، د والیبال د ټیم غړی په B او د دواړو ټیمونوګډ غړي په C سره وښیو په دې حالت کې د ستونو تر منځ اړیکه د سټ د تیورۍ په بڼه ولیکئ:



$$A \cap B = C$$

ایا پوهیږئ چې د B د سټ په مکمله سټ کې یعنې $\overline{B}$ کې د والیبال د ټیم ټول غړي ګډون لري. که نه؟

نو $\overline{B}$ ټول هغه زده کوونکي دي، چې د فوټبال د ټیم غړي نه دي، څرنګه چې 3 تنه زده کوونکي د والیبال د ټیم غړي، چې په عین حال کې د فوټبال د ټیم غړي هم دي په $\overline{B}$ کې ګډون نه لري؛ نو په دې اساس د والیبال ټیم $\overline{B}$ سټ په پام کې نیولو سره ناقص دی.

پوښتنې

1- د A, B ناخاپي پیښنه د دیاګرام په مرسته د A او B د بېلابېلو حالتونو لپاره چې د C پیښنه د A او B پیښنې په خپل ځان کې لري وښیئ او وضاحت ورکړئ.

2- په یوه مثال کې د A, B او C پیښنې چې A او B په خپل ځان کې لري وښیئ چې:

a) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

b) $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

3- لاندې پیښنې په بیان سره ولیکئ:

a) $\overline{A} \cup \overline{B}$

b) $\overline{A \cap B}$

c) $\overline{A \cup B}$

کلي او مکمله سټ

که چیرې S د افغانستان ولایات، A د شمال او B د نور پاتې ولایات وي، نو $S-A$ او $S-B$ کوم ولایات رانښیي؟

فعالیت

- د یوې داني رمل د اچولو نمونه یي فضا $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ او د $A=\{1,3,5\}$ ناخاپي پیښه په پام کې ونیسئ.
- د A د ناخاپي پیښې مکمله یعني $\overline{A}$ کومه ناخاپي پیښه کیدلی شي؟
- یوه ناخاپي پیښه پیداکړئ، چې A یې په برکې ولري، او په $\overline{A}$ کې شامله نه دی.
- ایاکولای شئ د S نمونه یي فضا څخه یو پیښه پیداکړي چې په یو وخت کې نه په A کې او نه په $\overline{A}$ ګډون ولري.
- د A او $\overline{A}$ د ناخاپي پیښو اتحاد له ډاډمنې پیښې سره څه اړیکه لري؟
- د A او $\overline{A}$ پیښو تقاطع ناممکنې یا ناشونې پیښې سره څه اړیکه لري؟

د پورتنی فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي.

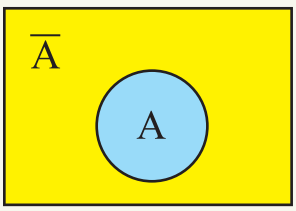
پایله: که چیرې S یوه نمونه یي فضا او A یوه ناخاپي پیښه وي:

- $\overline{A}$ یوه ناخاپي پیښه ده، چې په یوه وخت کې د A سره نه پیښیږي.
- د A هره ناخاپي پیښه چې پیښیږي:

a) $A\cup\overline{A}=S$

b) $P(A\cup\overline{A})=P(S)=1$

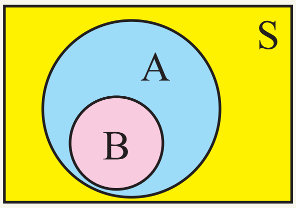
c) $P(\overline{A})=1-P(A)$

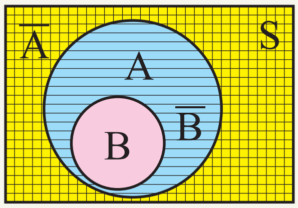


د S نمونه فضا

مثال: که د S په یوه نمونه یي فضا کې د A ناخاپي پېښه د B ناخاپي پېښه په بر کې ولري، په ګرافیکي ډول وښیئ چې د $\overline{B}$ ناخاپي پېښه د $\overline{A}$ ناخاپي پېښه په خپل ځان کې ولري.

حل: څرنګه چې $B \subseteq A$ دی، که چیرې مونږ په شکل کې $\overline{A}$ او $\overline{B}$ وښیو د لاندې شکل څخه په پوره ښکاره لیدل کېږي، چې: $\overline{A} \not\subset \overline{B}$





$\overline{B}$ افقي کرښې　　$\overline{A}$ عمودي کرښې

پوښتنې

1- د یوه مثال او ګراف په مرسته د S د نمونه یي فضا او د A او B ناخاپي پېښو لپاره وښیئ، چې:

a) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

b) $\overline{S} = \emptyset$

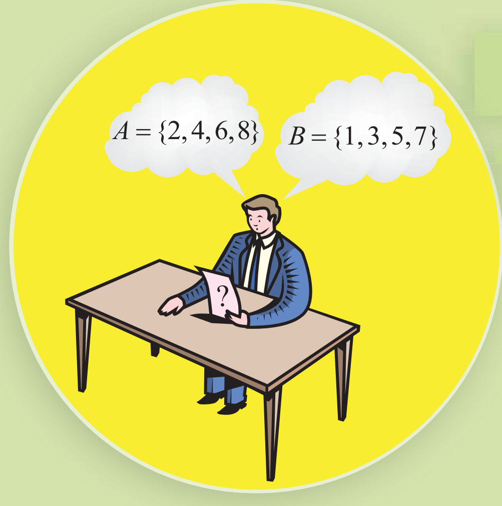
c) $S = \overline{\emptyset}$

2- د S نمونه یي فضا او د A او B ناخاپي پېښو لپاره لاندې پېښې په عبارت سره ولیکئ:

a) $\overline{A} \cap \overline{B}$

b) $\overline{(A \cup B)}$

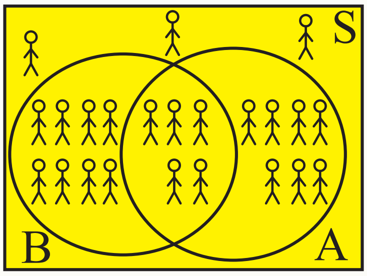
په ستونو مډل جوړونه



تر اوسه مو الجبري یا هندسي قوانینو
څخه د ژوندانه د مسائلو په حل کې ګټه
اخیستله.
أیا سوچ مو کړئ، چې د ستونو څخه هم
کولای شو چې د خپلو مسائلو د حل
لپاره ګټه واخلو؟

فعالیت

د یوه ټولګی د 23 زده کوونکو څخه مو د خویندو او ورونو لرونکو زده کونکو احصائیه راټوله کړئ، چې په لاندي دیاګرام کې لیکل شوی ده.



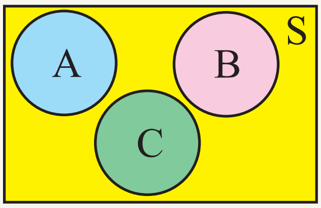
په شکل کې ټول هغه زده کوونکي چې خویندی لري د A په سټ او هغه زده کوونکي چې وروڼه لري د B په سټ سره ښودل شوي دي.
شکل په پام کې ونیسئ د لاندي فعالیت سوالونو ته ځواب پیدا کړئ.

- څو تنه خویندی لري؟
- څو تنه وروڼه لري؟
- څو تنه هم خویندی او هم وروڼه لري؟
- څو تنه نه خویندی او نه وروڼه لري؟
- څرنګه کولی شو دا مسأله د ریاضي په ژبه ولیکو.
- ټول هغه کسان چې خویندی نه لري څو تنه دي؟

لیدل کېږي چې پورتنی ګراف کولی شي چې پورتنی ټولو سوالونو ته او د هغوی په شان نورو سوالونو ته په ښه توګه ځواب ورکړئ.
نو د پورتنی فعالیت څخه لاندي پایله په لاس راوړو.

پایله: لیدل کېږي، چې دسټ د تیوري په کارولو سره په ورځني ژوندانه کې د ډېرو مسائلو سره مخامخ کېږو، چې کولای شو هغه حل پیداکړو، او هغه و ارزوو.
د سټ د تیوري تطبیق په احتمالاتو کې او یا په بل عبارت د هغو ناخاپي پیښو د پیښیدو د مسائلو د حل او د هغې د ښودنې د سټ د تیوري په مرسته د سټ تیوري یوه بله د تطبیق ساحه شمېرل کېدای شي.

مثال: د S نمونه یي فضا د B, A او C ناخاپه پیښې په لاندي دیاګرام کې ورکړل شوي دي په پام کې ونیسئ مطلوب دی د پیښو د پیښیدو احتمال:



a. د دې احتمال چې د A یا B حادثه ناخاپي پیښه شي.
b. د دې احتمال چې د A یا B پیښه، پیښه شي.
c. د دې احتمال چې د C پیښه، پیښه نه شي.

حل:

a. د A یا B احتمال په حقیقت د $A \cup B$ احتمال دی خرنګه چې د اپیښې یو د بل څخه بیلې دي، یعنې $A \cap B = \phi$ دی نو:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

b) د دې احتمال چې د A پیښه ناخاپه پیښه، پیښه شي د $\overline{A}$ مکمله پیښې څخه عبارت ده، چې د $\overline{A}$ پیښه نه ده پیښه شوې، په بل عبارت هغه پیښه ده چې د C یا B حادثه پیښه نه شي نو: $P(\overline{A}) = P(C \cup B)$ خرنګه چه $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

نو: $P(A) = 1 - (P(C \cup B)) = 1 - P(C) - P(B)$

c) د دې احتمال چې د C پیښه ناخاپه پیښه نه شي د هغې پیښې د پیښیدو د احتمال سره برابر دی چې د A یا B پیښې، پیښې شي، او دا د $A \cup B$ دپیښې د پیښیدو څخه عبارت ده.

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

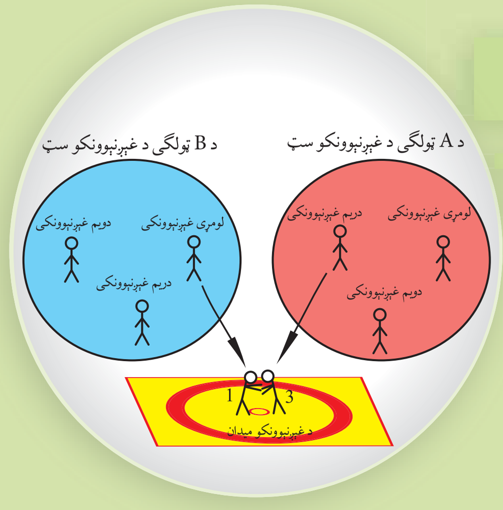
پوښتنې

1- هغه مثال چې په فعالیت کې مو ترې ګټه اخیستې ده په پام کې ونیسئ:

a) د دې احتمال مطلوب دی، چې له دې ټولګې څخه یو زده کوونکی په تصادفي یا ناخاپي ډول وټاکل شي چې خور او ورونه لري.

b) د یوه داسې زده کوونکي د ټاکلو احتمال چې تصادفي ټاکل کېږي پیدا کړئ، چې لږ تر لږه خور یا ورور ولري.

د شمېرنې اصل



د A او B دوو ټولگیو څخه درې تنه د غېږې لپاره ټاکل شوي دي په څو ډوله کولای شئ چې یو له بل سره په غېږه ورشي.

فعالیت

دوه عدده تور او سرمه یي رنگه پطلونونه له درې عدده سپین، ابي او فولادي رنگه کمیسونه په پام کې نیسو.

- په څو ډوله کولای شو هغو په ځان کړو(واغوندو).
- د شمېرنې د ترتیب لپاره د ونې د شکل له گراف څخه گټه واخلئ.
- د اغوستلو د ټولو امکاناتو او د پتلونونو او کمیسونو د شمېر تر منځ څه اړیکه شته ده.

د پورتنی فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راورو.

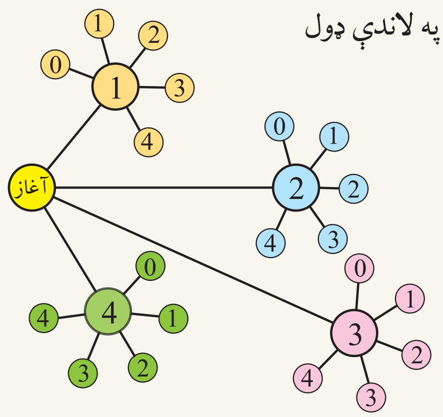
پایله:

1- د دوو سټونو د عناصر په ترکیب کې د ټولو امکاناتو شمېر د ترکیبي مجموعه د هرې یوې مجموعې د عنصر د شمېر د مجموعو دضرب حاصل سره مساوي دی.

2- که چېرې د امکاناتو شمېر او یا د یو سټ عناصر په m عدد او د یوه بل سټ د عناصرو شمېر مساوي په n عدد وي په دې حالت کې دواړه ټاکنې یو د بل سره د $(m\times n)$ د شمېر په ډول امکان لري.

مثال: د 3،2،1،0 او 4 رقمونو څخه په گټه اخستنې سره څو دوه رقمي عددونه کولای شو جوړ کړو؟ برسېره پر دې د امکاناتو د ونې گراف یې رسم کړئ او هغه احتمال پیدا کړئ، چې له دې عددونو څخه یو عدد په اتفاقي(ناڅاپي) ډول و ټاکل شي، چې هغه عدد په 2 د وېش وړ وي.

د دې کار لپاره د ذکر شوی دوه رقمي عدد د جوړولو لپاره دوه تش ځايونه ▭▭ د هر رقم لپاره په پام کې نيسو.
د کيڼي خوا په تش ځای کې د راکړل شويو پنځو رقمونو څخه 4 امکانانو(پرته له صفر) د 3,2,1,0 او 4 عددونو د ځای په ځای کولو لپاره شته دي، خو د ښي خوا د تش ځای لپاره 3,2,1,0 او 4 هرو پنځو عددونو څخه ګټه اخلو. په دې ترتيب د دې رقم د ټاکلو پنځه امکانه شته دی، چې په مجموعي ډول $4\times5=20$ شمېر د دوه رقمي عددونو د جوړولو لپاره د پورتنيو عددونو په وسيله موجود دي.
دا مطلب کولای شو د ونه ييز ګراف په مرسته په لاندې ډول وښيو، لکه:



د دې لپاره چې نومړی رقم پر 2 د ويش قابليت ولري د ښي خوا په تش ځای کې د 5 برابرو امکاناتو څخه يوازې 3 امکانه د (3,2,1,0 او 4) شته دی. د داسې عددونو د جوړولو لپاره چې پر 2 د ويش وړ وي د $4\times3=12$ برابر حالتونه دي، چې په لاندې حالت کې د هغه رقم د ټاکل کيدو احتمال چې پر 2 د ويش وړ وي عبارت دی له:

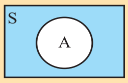
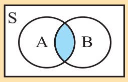
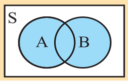
$$P\ (\text{مطلوب عدد}) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0.6 = 60\%$$

پوښتنې

1- د (م، د، ی) تورو څخه په ګټه اخيستنه څو څلور حرفي معنا لرونکي او معنا نه لرونکي کليمې جوړولای شو؟ موضوع د ونه ييز ګراف په مرسته تشريح کړئ.
که چيرې د دې ترکيبي کلمو څخه په ناڅاپي ډول يوه کلمه وټاکو د دې احتمال پيدا کړئ، چې دا کلمه((مريم)) وي.
2- د 8,7,4,1,0 او 9 عددونو څخه د مبايل تليفون څو داسې شپږ رقمي نمبرې جوړولای شو چې د کيڼې خوا څخه په 077 پيل شوي وي.

د نهم څپرکی لنډيز

• د دې لپاره چې وکولای شو د ناخاپي پیښو د ترکیب د بېلا بېلو حالتونو د پرتله کولو لپاره د ستونو د تیوري په کارولو سره یو ښه تصور ولرو هغه مو په لاندې جدول کې راټول کړل.

د اتفاقي حادثې بيان	د بيان ارايه د ست په واسطه	د Venn دیاګرام او اتفاقي حادثه	د حادثې احتمال
د S هغه ټولې ناخاپي پیښې چې د A په پیښه کې ګډون و نه لري د A پیښې عکس دی.	$\overline{A} = S - A$ یا $S = A \cup \overline{A}$		خرنګه چې $P(S) = 1$ دی نو $P(A) = 1 - P(\overline{A})$
د A ناخاپه پیښه یا د B ناخاپه پیښه پیښیږي.	$A \cap B$		$P(A \cap B)$
لږ ترلږه یو د A یا د B د ناخاپي پیښو څخه پیښیږي.	$A \cup B$		$P(A \cup B)$ $= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

د شمیرنې حل: د دوو ستونو د عناصرو په ترکیب کې ټولو امکاناتو شمېر د هرې ترکیبي مجموعې د عناصرو د ضرب د حاصل سره مساوي دی.

که د یوې مجموعې د عنصرونو امکان په m ډول او د بلې مجموعې د عنصرونو(غړو) امکان په n ډول وي د دوی یو د بل سره د ترکیب د ټولو امکاناتو شمېر د $m \times n$ سره برابر دی.

د نهم څپرکي پوښتنې

1- که S یوه نمونه یي فضا او A د هغې یو ناخاپه پیښه وي وښیئ چې:

a) که $A \subseteq \phi$ وي وښیئ، چې $P(A) = 0$ دی.

b) که $S \subseteq A$ وي په دې حالت کې $P(A) = 1$ دی.

که چیرې د C ناخاپي پیښه د A او B ناخاپي پیښې په بر کې ولرئ، وښیئ چې همدارنګه د C ناخاپي پیښه د $A \cup B$ ناخاپي پیښه په بر کې ولري.

3- که چیرې S د A او B یوه نمونه یي فضا وي د B او $A \cup B$ ناخاپي پیښې یو بل په بر کې ولري وښیئ چې د $A \cup B$ او B یو بل سره برابر دي.

4- که د S په یوه نمونه یي فضا کې د B ناخاپه پیښه د A پیښه په بر کې ولري، وښیئ چې د A او $A \cup B$ ناخاپه پیښې یو بل په بر کې ولري. برسېره پر دې ښکاره(واضح) کړئ، چې د دې ناخاپي پیښو احتمال یو د بل سره څه اړیکه لري؟

5- که چیرې S یوه نمونه یي فضا وي او B د هغې یوه ناخاپه پیښه وي وښیئ چې: $S - B = \overline{B}$

6- د ګراف په مرسته وښیئ چې د A او B دوې ناخاپي پیښې او S یوه نمونه یي فضا د $B - A$ او $\overline{A} - \overline{B}$ ناخاپي پیښې سره برابرې دي، یعنې: $\overline{A} - \overline{B} = B - A$

7- وښیئ چې د $\overline{A} \cap \left[(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \right]$ ناخاپي پیښ, احتمال د صفر سره مساوي دی.